

Tu coches, je coupe, j' te mange

Morgane COURTEL, Arthur DAVENEL, Jeanne LHOTTELIER, Hugo MOREL, Romane POAZEVARA, élèves de classe de 5ème, collège Saint Pierre, PLOUHA (22)

Encadrés par Mesdames BEASSE et BOILLOT

Collège Saint Pierre, PLOUHA (22)

Chercheur : Victor KLEPTSYN, CNRS et Université Rennes 1

Description du sujet

Le jeu du « tu coches, je coupe, j' te mange » se joue à 2 joueurs, le joueur A et le joueur B.

- **Règle du jeu :**

Nous devons d'abord faire un quadrillage, puis le 1^{er} joueur place une croix où il le souhaite dans une case et le 2^{ème} joueur coupe sur une ligne du quadrillage et enlève la partie contenant la croix. A son tour, il place sa croix dans une case et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule case : le joueur qui met sa croix dans la dernière case gagne la partie.

- **Notre sujet :**

Victor Kleptsyn, notre chercheur nous a demandé, en nous proposant ce jeu, de savoir lequel des 2 joueurs gagne sur les différents quadrillages tout en jouant le plus stratégiquement possible.

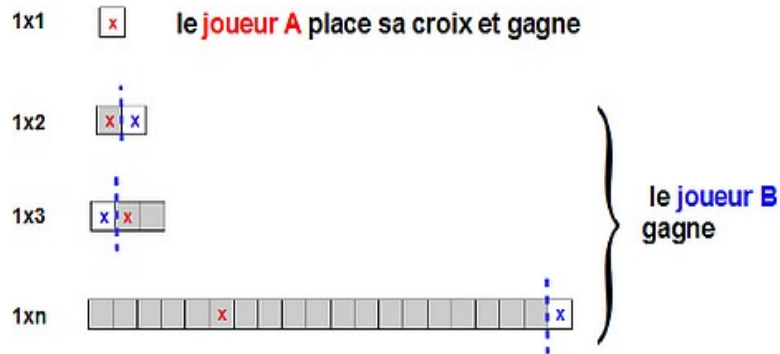
Nos résultats

1. **Pour les rectangles $1 \times N$** c'est toujours le joueur B qui gagne sauf pour la configuration 1×1 et nous l'avons démontré
2. **Pour les rectangles $2 \times N$** c'est le joueur B qui gagne à partir de 2×4 et nous l'avons démontré
3. **Pour les rectangles $3 \times N$** c'est aussi le joueur B qui gagne à partir de 3×4 et nous l'avons démontré
4. **Pour les quadrillages carrés** c'est toujours le joueur A qui gagne et nous l'avons démontré.
5. Nous avons étudié d'autres cas et mis les résultats dans un tableau. D'après ce tableau, il semble que **les quadrillages favorables au joueur A ne sont pas du tout disposés au hasard.**
6. **La meilleure stratégie :** chaque joueur a intérêt à jouer dans une des cases centrales du quadrillage. Nous l'avons expliqué.

Démonstrations

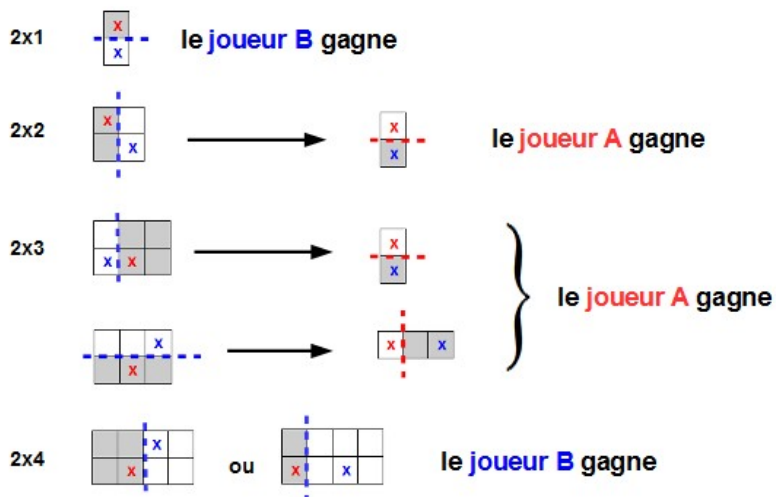
$M \times N$ signifie que M est le nombre de colonnes dans le quadrillage utilisé pour le jeu, et que N est le nombre de lignes.

Pour les quadrillages $1 \times N$ c'est le deuxième joueur qui gagne car quel que soit l'endroit où le premier joueur met sa croix, le deuxième joueur pourra toujours couper en laissant une seule case. Sauf pour le cas 1×1 où c'est le premier joueur qui gagne.



Pour les quadrillages $2 \times N$ c'est le joueur B qui gagne à chaque fois à partir de 2×4 car quel que soit l'endroit où le joueur A met sa croix, le joueur B pourra couper en rectangle 2×3 ou en carré 2×2 . Ces deux possibilités de découpage pourront le faire gagner car dans le carré 2×2 c'est le premier joueur qui joue dans le quadrillage (ici le joueur B) qui gagne car le joueur A coupera forcément en rectangle 1×2 qui est un cas $1 \times N$ et donc c'est le joueur qui joue en deuxième dans ce quadrillage qui gagne (ici le joueur B).

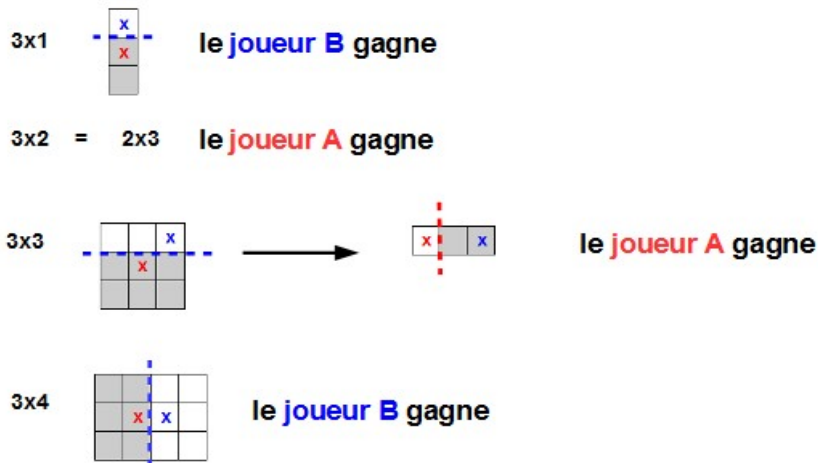
Et pour le cas 2×3 c'est aussi le premier joueur qui joue dans le quadrillage (ici le joueur B) qui gagne aussi le joueur A fait un quadrillage 1×2 ou 1×3 et ces deux cas sont des cas $1 \times N$ où le joueur qui joue en deuxième (ici le joueur B) gagne.



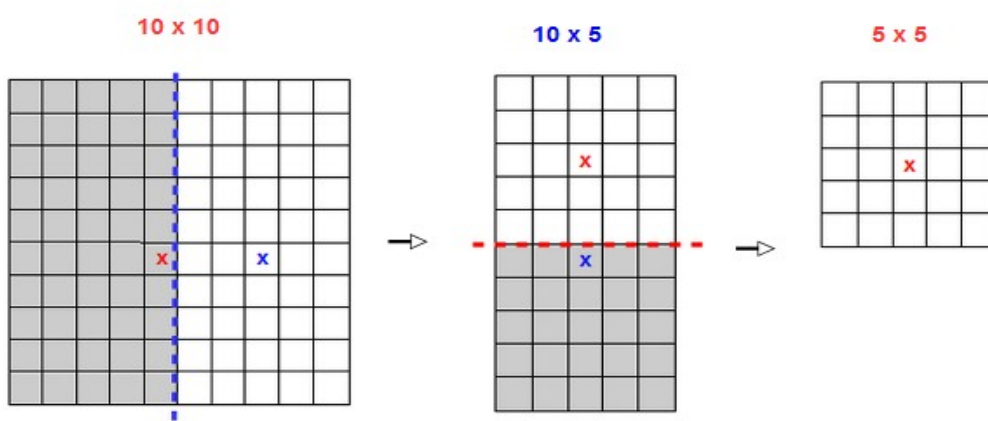
Pour les quadrillages 3xN c'est le joueur B qui gagne à partir de 3x4 car on peut toujours faire un quadrillage 3x3 ou 3x2.

Ces deux possibilités seront gagnantes pour lui car pour le cas 3x2 c'est le joueur qui joue en premier qui gagne (ici le joueur B) comme nous l'avons vu pour les quadrillages 2xN avec la configuration 2x3.

Pour le quadrillage 3x3 c'est le joueur qui joue en premier qui gagne (ici le joueur B) en mettant sa croix au milieu, le deuxième joueur qui jouera dans ce quadrillage (ici le joueur A) sera obligé de couper en quadrillage 1x3 ce qui le fera perdre car quel que soit l'endroit où il mettra sa croix, le joueur B pourra couper en laissant juste une seule case puis gagner en mettant sa croix dans la dernière case.



Pour les quadrillages carrés nous avons vu que c'était le premier joueur qui gagnait car quelle que soit la taille du carré il pouvait toujours refaire un carré plus petit dans le rectangle laissé par le joueur B qui, lui, est obligé de faire un rectangle car il ne peut pas faire de carré dans un carré (1). Donc le joueur A peut continuer à faire des carrés de plus en plus petits jusqu'à ce qu'il gagne en faisant un carré 1x1 c'est-à dire jusqu'à ce qu'il mette sa croix dans la dernière case du quadrillage.



Le tableau des résultats

Comment a-t-on construit le tableau ?

Nous avons fait un tableau à deux axes :

- l'axe horizontal qui indique le nombre de colonnes du quadrillage ;
- l'axe vertical qui indique le nombre de lignes du quadrillage .

Dans ce tableau, on y inscrit tous les résultats de nos parties pour ensuite pouvoir s'en servir pour les plus grands carrés ou rectangles.

On y inscrit un 1 quand c'est le premier joueur qui gagne, et un 2 quand c'est le deuxième joueur qui gagne.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
6	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2						
9	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2						
10	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2						
11	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2						
12	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2						
13	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1							
14	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1							
15	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1							
16	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2										
17	2	2	2	2	2	2	2															
18	2	2	2	2	2	2	2															
19	2	2	2	2	2	2	2															
20	2	2	2	2	2	2	2															
21	2	2	2	2	2	2	2															
22	2	2	2	2	2	2	2															

Comment se sert-on de ce tableau ?

Lors de nos parties, si nous avons un doute, le tableau nous sert à savoir si dans la configuration dans laquelle nous voulions jouer, nous pourrions gagner en jouant le plus stratégiquement possible.

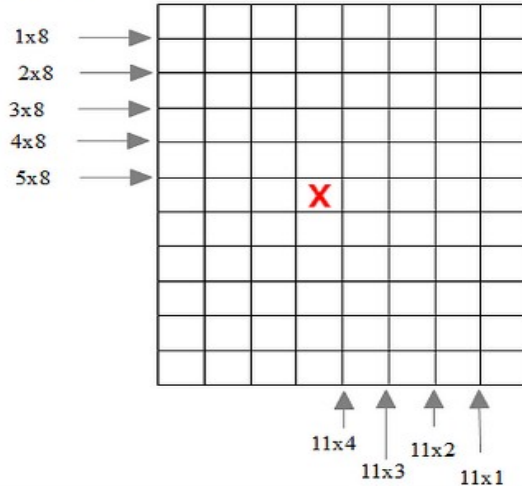
Lors de sa construction, nous y avons inscrit un 1 ou un 2 :

Quand nous avons un 1 c'est que c'est le premier joueur qui joue dans cette configuration qui gagne.

Et quand c'est un 2 qui est inscrit, c'est le deuxième joueur qui joue dans cette configuration qui gagne.

Pour gagner, chaque joueur cherche donc à couper le quadrillage dans une configuration telle qu'il trouve un 1 dans le tableau des résultats. Si c'est possible, il est sûr de pouvoir gagner. S'il ramène à une situation contenant un 2 dans le tableau, il ne pourra gagner qu'en cas d'erreur de la part de son adversaire.

Exemple pour 8 x 11 :



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
5	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
6	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
7	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
8	2	2	2	2	2	2	2	2							
9	2	2	2	2	2	2	2	2							
10	2	2	2	2	2	2	2	2							
11	2	2	2	2	2	2	2	2							
12	2	2	2	2	2	2	2	2							
13	2	2	2	2	2	2	2	2							
14	2	2	2	2	2	2	2	2							
15	2	2	2	2	2	2	2	2							

Quel que soit son découpage, le joueur B perd (2).

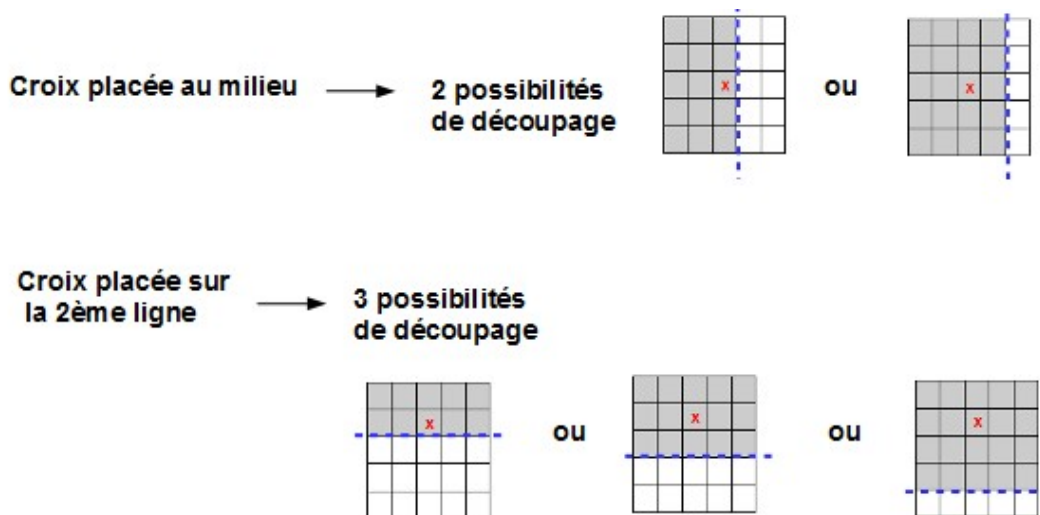
Observation :

Les « 1 » sont regroupés sous forme de carrés situés sur la diagonale. Nous remarquons que les carrés doublent de côté : ils passent de 1x1 à 2x2 puis à 4x4 puis à 8x8. Nous supposons que le suivant sera un carré 16 x 16 mais nous ne l'avons pas démontré.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
6	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2					
9	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2					
10	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2					
11	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2					
12	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2					
13	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
14	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
15	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
16	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2							
17	2	2	2	2	2	2	2															
18	2	2	2	2	2	2	2															
19	2	2	2	2	2	2	2															
20	2	2	2	2	2	2	2															
21	2	2	2	2	2	2	2															
22	2	2	2	2	2	2	2															

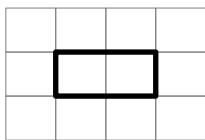
La meilleure stratégie

La meilleure stratégie pour gagner est de placer sa croix au milieu du quadrillage.

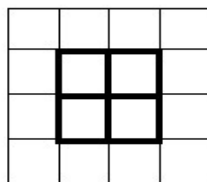


Si le joueur ne met pas sa croix au milieu, le joueur suivant pourra faire les mêmes découpages que si la croix avait été au milieu, plus de nouveaux découpages. Si le coup au centre ne nous sauve pas, toute autre manière de jouer ne nous sauvera pas donc pas non plus et réciproquement.

Si le côté du quadrillage est pair, il faut mettre sa croix dans l'une des 2 ou 4 cases centrales.



Rectangle 3 x 4



Carré 4 x 4

Conclusion

Nous avons aimé cette expérience « Math en Jeans ». Lors des séances, nous avons plus l'impression de jouer à un jeu que de faire des mathématiques. Nous avons essayé de résoudre la problématique que nous avons reçue de notre chercheur le mieux possible. Mais nous n'avons pas trouvé toutes les solutions, comme pour expliquer pourquoi, dans le tableau des résultats, les carrés de « 1 » doublent de côté.

Merci d'avoir lu notre article.

Notes d'édition

(1) Tous les rectangles ne sont pas perdants, mais si le premier joueur joue au centre, comme indiqué plus loin, le second doit laisser un rectangle avec un côté inférieur ou égal à la moitié de l'autre ; dans ce cas, quel que soit l'endroit où il place sa croix, le premier peut effectivement laisser à nouveau un carré.

(2) On peut remarquer que le même argument s'applique sans changement pour tous les quadrillages avec les deux côtés compris entre 8 et 15, ceux correspondant au carré laissé en blanc sur le tableau présenté ici ; cela permet de le compléter avec des 1 dans le tableau suivant.