

Automates cellulaires cycliques

Année 2013- 2014

Présenté par Rhodes Molly 4°A, Pastorelli Jade 4°A, Radigales Keziah 4°B, Davezac Marie-Lou 3°B et Caumont Margaux 3°B du collège de Marciac accompagnées par leurs professeurs M. Christophe Pignon & Mme Edelyne De Nodrest.

Sujet proposé par M. Xavier Bressaud de l'université Paul Sabatier, Toulouse.

I-Présentation du sujet

Notre sujet est basé sur le principe de « shi-fu-mi » ou « pierre-feuille- ciseaux ». Nous les avons remplacés par des chiffres. Le 1 correspond à la pierre, le 2 correspond aux ciseaux et le 3 correspond à la feuille. Nous avons attribué des couleurs à chaque chiffre. Le 1 (jaune) « mange » donc le 2, le 2 (vert) « mange » le 3 et le 3 (rose) « mange » le 1. Nous prenons une suite infinie au hasard composée de ces 3 chiffres. Nous comparons les chiffres 2 par 2 et nous regardons lequel est le plus fort, puis nous l'inscrivons au dessous. Cela nous donne donc une 2ème ligne infinie qui est le résultat de la 1ère et nous poursuivons ainsi jusqu'à ce que la suite ait fini d'évoluer.

Exemple :
$$\begin{array}{cccccccccccc} 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & \dots \\ & & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

Notre objectif est de savoir comment les suites évoluent et si nous pouvons les prévoir à l'avance.

II-Conjecture

Nous avons conjecturé que soit la suite reste bloquée sur le motif 1 2 3, 111, 222, 333 ou soit, elle se décale à l'infini sur le motif 3 2 1.

III-Recherches

A. Les suites qui se répètent

On est parti sur des suites qui se répétaient de type :

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ & & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & \dots \end{array}$$

On a remarqué que la suite de motif 123 ne bougeait pas et que visuellement, cela formait des colonnes de couleurs.

En outre, la suite au motif 321 se décale à l'infini et visuellement, cela forme des triangles de couleurs.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ & & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & \dots \\ & & & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & \dots \end{array}$$

1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 ...

1 3 2 1 3 2 1 3 2 1 3 2 ...

On peut appeler ces suites des suites « stables » (dans le sens où on sait ce qu'elles font).

B. Les suites qui ne se répètent pas

Nous avons démontré la propriété suivante :

Propriété : Si dans une suite de même nombre, on insère un nombre qui le mange, alors il « mangera » tous les nombres à sa gauche.

Démonstration :

Soit kkkkkkk... une suite de nombre avec $1 \leq k \leq 3$.

Soit p un nombre tel que p mange k. On insère p dans la suite des nombres k, n'importe où.

On obtient donc :

étape 0 : kkkkkkk...kkpkkk...

Pour l'étape suivante, on va comparer d'abord, en partant de la gauche, les nombres k entre eux, 2 par 2 et on met le résultat de cette comparaison sous le k de gauche. On obtiendra donc à chaque fois le nombre k (puisque'il y a égalité) :

ainsi : kkkk

donne : kkk..

Pour connaître le résultat du 4eme nombre rose, il nous faut le 5eme de la frise précédente. Ainsi les n premiers nombres k donnent n-1 nombres k comme résultat à l'étape suivante.

Puis, au bout d'un moment, on finira par comparer kp. On obtiendra alors le nombre p comme résultat (puisque p « mange » k).

ainsi : kkkkp

donne : kkkpp

Le p rose de l'étape suivante est le résultat du k vert et du p rose de l'étape précédente. Le p bleu de l'étape suivante est le résultat du p rose et du k bleu de l'étape précédente.

Donc en généralisant, on obtient :

étape 0 : kkkkkkk...kkpkkk...

étape 1 : kkkkkkk...kppkkk...

A l'étape 1, il y a donc un k de moins à gauche des p. Lorsqu'on fera l'étape 2, on procédera de la même manière. Et c'est l'équivalent de ce qu'on vient de faire avec l'étape 1, mais avec un k de moins à gauche.

A l'étape 2, nous obtiendrons donc encore un k de moins à gauche.

Et ainsi de suite.

Donc au bout de n étapes (n étant le nombre de k qu'il y a à gauche du p), on obtiendra bien :

étape n : ppppppp...pppkkk...

Ce qui démontre la propriété.

C. Le principe des boîtes

Puis, on a inventé le principe des boîtes.

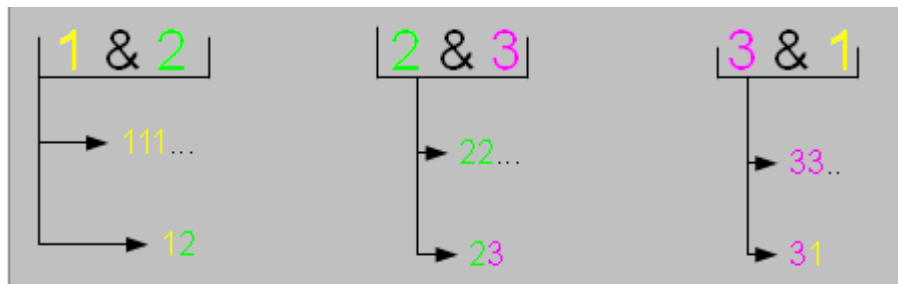
Définition : une boîte est une partie de la suite composée de deux chiffres différents. Elle se termine lorsqu'un troisième chiffre apparaît.

Etant donné que cela ne change rien au résultat, pour faciliter la lecture, on peut écrire un

seul chiffre au lieu de plusieurs fois le même.

Exemple de boîte : 111221122212
devient : 121212

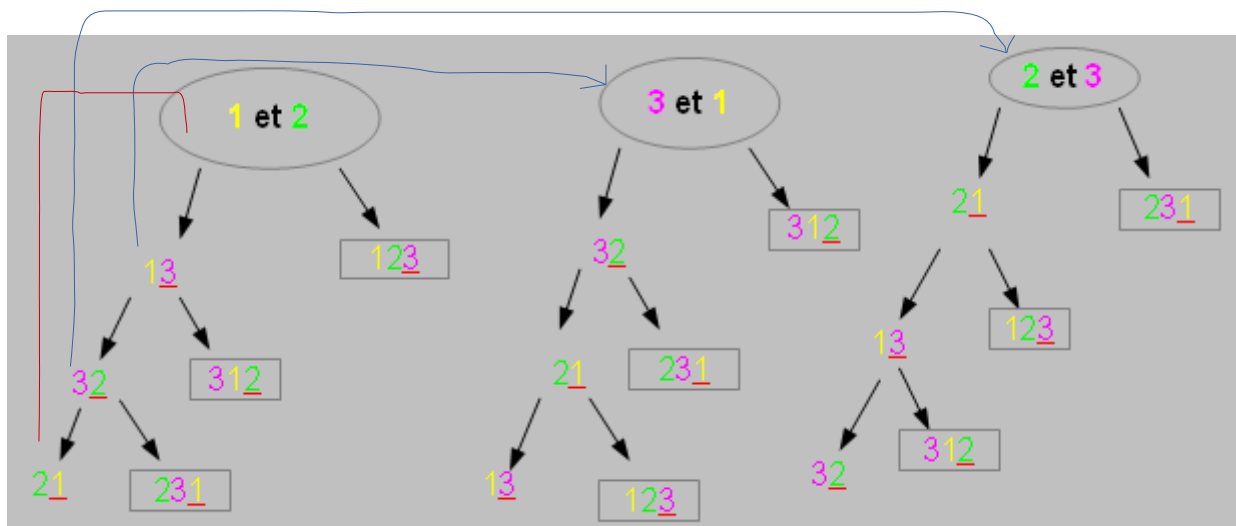
Ce schéma montre les résultats possibles des boîtes :



Pour la boîte 12, si le dernier chiffre de la boîte est 1, il mangera tous les 2 avant lui, ce qui explique le 111... . En revanche, si la boîte se termine par 2, le dernier 2 ne pourra pas être mangé, ce qui explique le 12.

D. L'algorithmme

Le schéma ci-dessus nous a permis de trouver notre algorithmme qui est la preuve de notre conjecture.



Le chiffre souligné en rouge est celui qui est après la boîte.

On prend une boîte de 1 et de 2. Comme sur notre schéma, son résultat est soit 1 ou bien 12 (d'après la propriété plus haut). D'après la définition d'une boîte, ce résultat est suivi d'un 3 (ou plusieurs).

Avec comme résultat de la boîte 12, on obtient 123, c'est donc bloqué c'est à dire que la frise reste sur 123 pour les étapes suivantes (flèche droite de la boîte).

Avec comme résultat de la boîte 1, on obtient 13, c'est donc le résultat de la boîte 13. Et donc on continue avec les flèches droite et gauche qui sont les résultats de la boîte 13. Puis lorsque le résultat revient à la même boîte que celle du début comme le montre la flèche rouge, la frise se décale sur le motif 321. **(1)**

La démonstration est la même pour les autres boîtes.

IV-Conclusion

Dans cette suite infinie de nombre, nous avons donc prouvé que pour les k premiers nombres en k étapes maximum, soit la suite reste bloquée sur le motif 1 23, 111, 222, 333 ou soit, elle se décale à l'infini sur le motif 321. Ce qu'on appellera une frise « stable ». Un nombre p situé après le k -ième peut cependant faire changer la frise aussi. Mais au bout de p étapes, la frise sera devenue stable. Et ainsi de suite.

(2)

Généralisation admise : Pour n nombres dans la frise, on prend comme règle de domination que :

Le 1 mange tous les nombres sauf le n -ième.

Le k mange tous les nombres sauf le $(k-1)$ ième. (k étant entre 1 et n).

(3)

Alors soit les k premiers nombres restent bloqués sur le motif dans lequel les nombres sont consécutifs croissants dans la boucle ou dans les autres cas, ils se décalent à l'infini ou restent sur un seul nombre.

En cas d'égalité, c'est le nombre de droite qui mange celui de gauche.

Exemple :

Pour les 30 premiers nombres d'une suite de nombres entiers compris entre 1 et 8 inclus, avec comme règle :

le 1 mange tous les nombres sauf le 8.

Le 2 mange tous les nombres sauf le 1.

etc...

6543173778 65717352858221754332

54317377765717352858221754332

4317377765717352858221754332

...

2

Notes d'édition

(1) Il manque des éléments pour comprendre ce schéma. Considérons par exemple le bloc 12, s'il reste 12 alors le bloc suivant serait 23, il serait donc logique de suivre le résultat du bloc 23 ce qui n'est pas fait là.

(2) Le résultat concernant le nombre d'étapes à partir duquel la suite reste bloquée n'a pas été montré.

(3) Les règles pour manger les nombres lorsque il y a plus de trois nombres ne sont pas très claires : deux nombres non consécutifs peuvent se manger mutuellement ! Ainsi dans l'exemple, le 8 mange le 5 à un moment puis le 5 mange le 8.