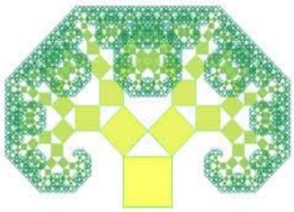
Un drôle d'arbre

Année 2013 - 2014

<u>Elèves de 4ème</u> : Martin et Thomas Colligon, Yanis Missenard, Adrien louineau, Guillaume Gometz.
<u>Etablissement</u> : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
<u>Enseignants</u> : Claudie ASSELAIN, Florence FERRY et Nicolas SEGARRA.
<u>Chercheur</u> : Céline Abraham.

Le sujet

On part d'un carré de côté *x*, on construit sur un des côtés, un triangle isocèle rectangle dont l'hypoténuse est le côté du carré. On construit ensuite deux carrés sur les côtés égaux du triangle puis, on répète ces constructions de triangles rectangles isocèles et de carrés, de façon alternée. Les carrés forment une sorte d'arbre.



Nous nous sommes posés les questions suivantes :

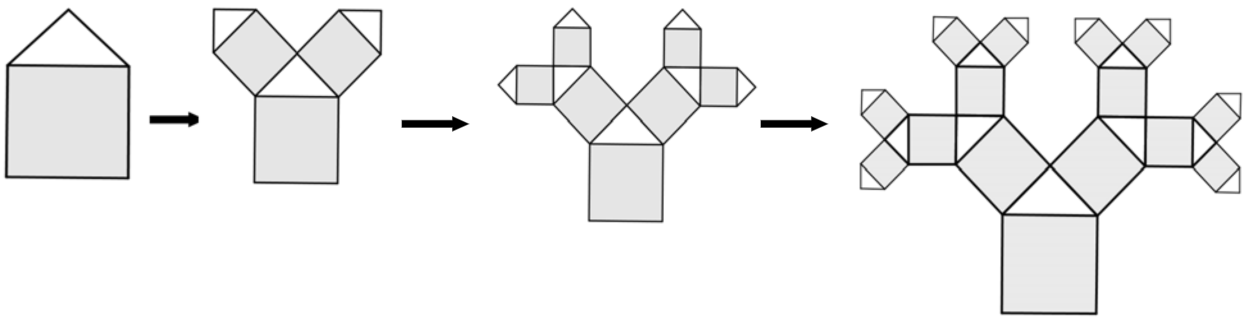
- De combien la taille (l'aire et la hauteur) de cet arbre augmente(nt)-t-elle(s) à chaque étape de la construction ?

- L'arbre s'étend-il ou reste-t-il à l'intérieur d'une certaine surface ?

- Les carrés de l'arbre se chevauchent-ils à partir d'une certaine étape ?

- Si on prend un triangle rectangle non isocèle, que devient notre arbre ?

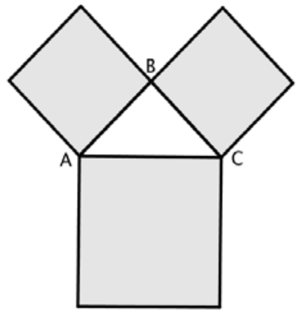
Construction des premières étapes



Pourquoi l'appelle-t-on « Arbre de Pythagore » ?

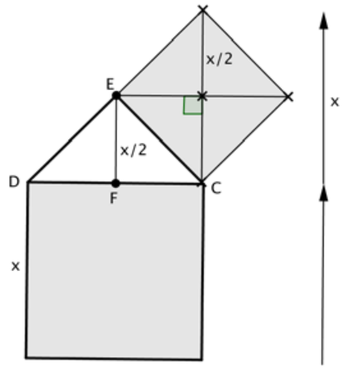
Cette figure illustre bien géométriquement le théorème de Pythagore. Puisque ABC est rectangle en B, on a : $AC^2 = AB^2+CB^2$. AC^2 correspond à l'aire du carré de base (le grand) et AB^2+BC^2 correspond à la somme des aires des deux plus petits carrés.

Le théorème de Pythagore traduit le fait que la somme des aires des petits carrés est la même que celle du grand.



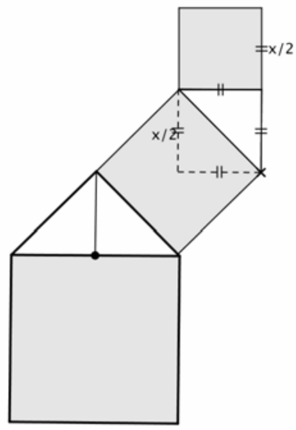
Evolution de la hauteur de l'arbre

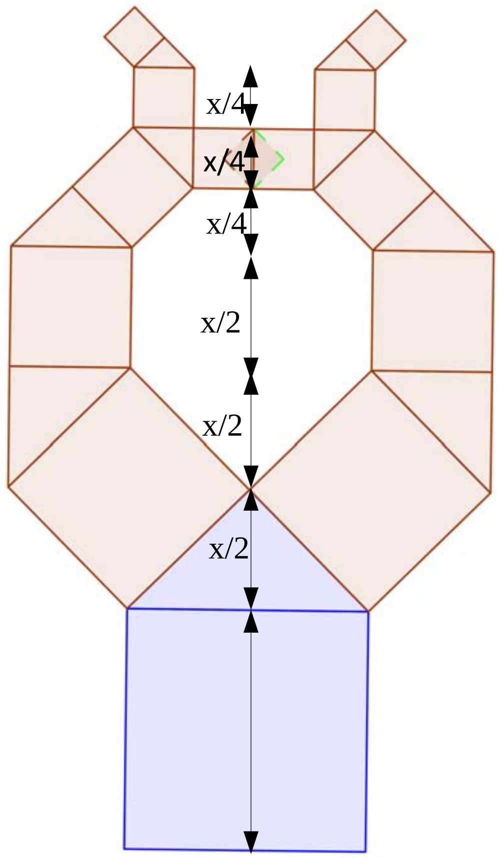
Notons *x* le côté du premier carré. On sait que EDC est isocèle rectangle en E donc : $\widehat{EDF}=\widehat{ECF}=45°$
En notant F le milieu de [DC] on a de plus : (EF) perpendiculaire à (DC). On a donc DFE et FEC qui sont des triangles rectangles isocèles en F. Donc : EF = DF = *x*/2.



A la création des deux carrés suivants (les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu et ont la même longueur), la hauteur augmente de *x.*

A la troisième étape, la hauteur augmente de x/2 puis à la quatrième, de x/2, avec la même démonstration qu'à la création du 2ème carré.





Récapitulons nos résultats dans un tableau

Etapes	Hauteur ajoutée	Hauteur totale
1	x	x
2	x	2x
3	x/2	
4	x/2	3x
5	x/4	
6	x/4	7x/2
7	x/8	
8	x/8	15x/4
9	x/16	
10	x/16	31x/8
11	x/32	
12	x/32	63x/16
13	x/64	
14	x/64	127x/32
15	x/128	
16	x/128	255X/64

Voici un exemple pour x=10, réalisé sur tableur

Etapes	Hauteur ajoutée	Hauteur totale
1	10	10
2	10	20
3	5	25
4	5	30
5	2,5	32,5
6	2,5	35
7	1,25	36,25
8	1,25	37,5
9	0,63	38,125
10	0,63	38,75
11	0,3125	39,0625
12	0,3125	39,375.
13	0,15625	39,53125.
14	0,15625	39,6875.
15	0,078125	39,765625.
16	0,078125	39,84375.

Lorsque le nombre d'étapes devient grand, la hauteur ajoutée devient très petite et se rapproche de 0. Nous avions pensé au début, que l'arbre allait grandir jusqu'à l'infini ; mais lorsqu'on a réalisé nos calculs sur le tableur, nous sommes allés très loin dans le nombre d'étapes et nous n'avons pas réussi à dépasser 40. On s'en rapprochait de plus en plus, sans jamais l'atteindre. A l'étape 45, la hauteur de l'arbre est de 39,9999928474, à l'étape 61, nous avons obtenu 39,9999999721.

Nous avons donc conjecturé que l'arbre restait à l'intérieur d'une surface, mais nous n'avons pas réussi à le démontrer.

Evolution de la surface de l'arbre

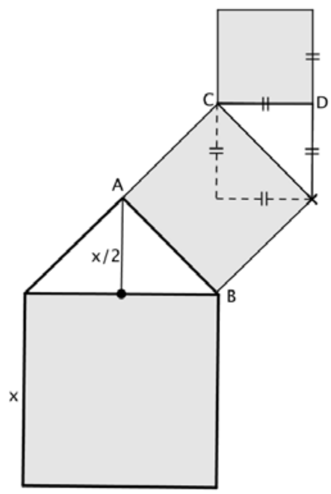
Nous avons calculé seulement l'aire des carrés. On remarque qu'à chaque étape ajoutée, le nombre de carrés ajoutés est multiplié par 2 et l'aire des carrés ajoutés est la même que l'aire des carrés à l'étape précédente (théorème de Pythagore).

- Etape 1 : 1 carré aire totale : $A_1 = x^2$
- Etape 2 : 2 carrés ajoutés aire totale : $A_2 = x^2 + x^2 = 2x^2$
- Etape 3 : 4 carrés ajoutés aire totale : $A_3 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$
- Etape 4 : 8 carrés ajoutés aire totale : $A_4 = 3x^2 + x^2 = 4x^2$
- …
- Etape n : 2^{n-1} carrés ajoutés aire totale :$A_n = (n-1)x^2 + x^2 = nx^2$

(*pour n entier supérieur à 1)*

Longueur d'un côté du carré en fonction du nombre d'étapes effectué

Soit x la longueur du côté du carré initial. Le théorème de Pythagore s'applique puisque nous travaillons dans des triangles rectangles :



$$AB^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

$$AB = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x \times \sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 \times x$$

$$CD^2 = \left(\frac{\sqrt{2}\,x}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\,x}{4}\right)^2 = \frac{2\,x^2}{16} + \frac{2\,x^2}{16} = \frac{x^2}{4}$$

$$CD = \frac{x}{2} = \frac{x \times 2}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times x$$

Nous avons continué nos calculs et nous avons obtenu :

Etape 1 : x

Etape 2 : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 \times x$

Etape 3 : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times x$

Etape 4 : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \times x$

Etape 5 : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \times x$

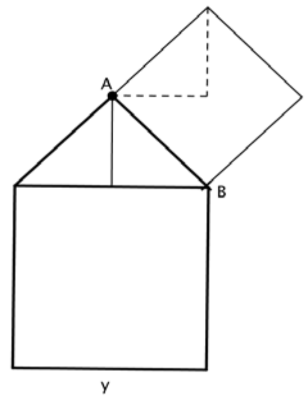
Et ainsi de suite...

Nous avons conjecturé qu'à l'étape n, avec n entier supérieur à 1, la longueur d'un côté d'un carré est :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\times x$$

Démonstration grâce au théorème de Pythagore :
Soit y la longueur du côté d'un carré à n'importe quelle étape, nous allons calculer la longueur du côté du carré de l'étape suivante.

$AB^2=\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2$ D'où : $AB^2=\frac{y^2}{4}\times 2$ d'où :



$$AB^2=y^2\times\frac{1}{2}$$

Donc : $AB=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y$

A chaque étape, le côté du carré est multiplié par $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

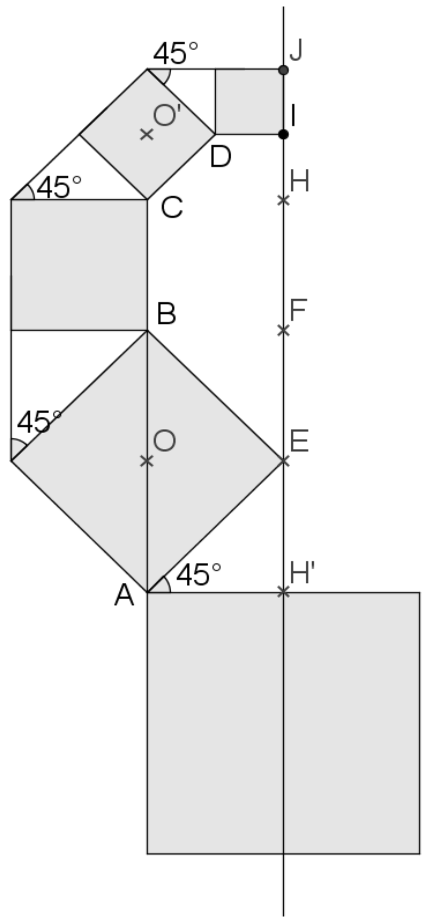
Notre conjecture est donc vérifiée.

<u>Etape de chevauchement</u>

Nous avons ensuite regardé si il y avait chevauchement à partir d'une certaine étape dans un arbre de Pythagore avec des triangles rectangles isocèles. Nous avons vu qu'il y avait chevauchement à la sixième étape dans tous les arbres que nous avons construits. Nous avons donc émis une conjecture : il y a chevauchement à la sixième étape.

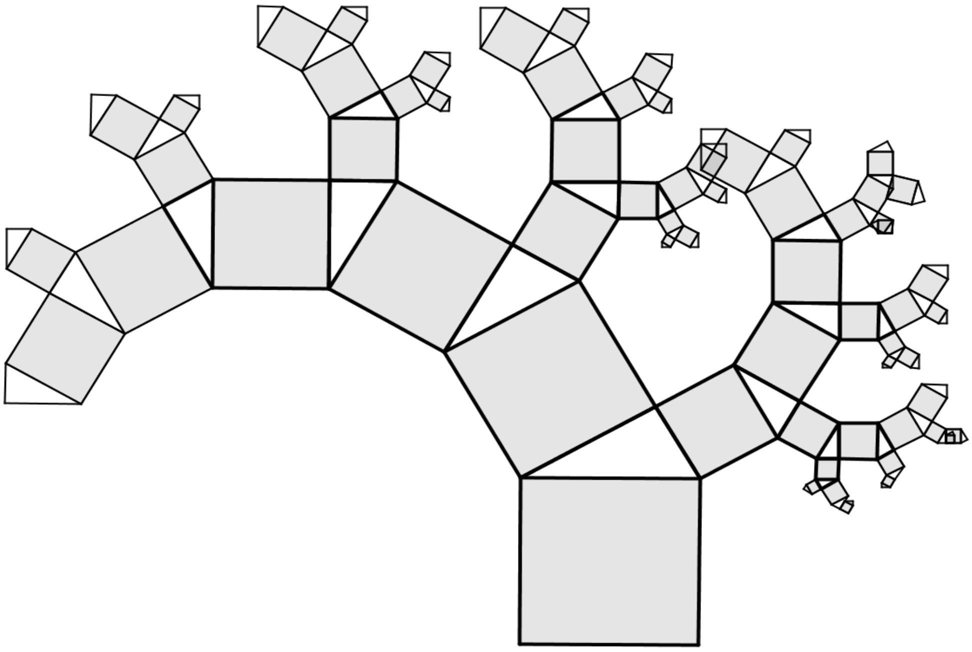
Explication :

On trace le premier carré. Ensuite on trace le deuxième carré avec un angle de 45° (angle A).
Puis le troisième, quatrième et cinquième avec encore un angle de 45 °.
Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu et sont de même mesure .
Donc AO=OE=AH' et OE=OB=BF.
[BC] est un côté du troisième carré donc : BF=BC=CH.
On sait que la longueur de la diagonale du quatrième carré est égale à la longueur d'un des côtés du carré précédent.
O' et le point d'intersection des diagonales du quatrième carré. Donc O'C = $\frac{CB}{2}$
Donc CO' = O'D = DI
Donc O'I = CH = BF = OE = AH'
Le cinquième carré rencontre l'axe de symétrie et le sixième carré dépasse l'axe de symétrie et donc il y a chevauchement à cette sixième étape.

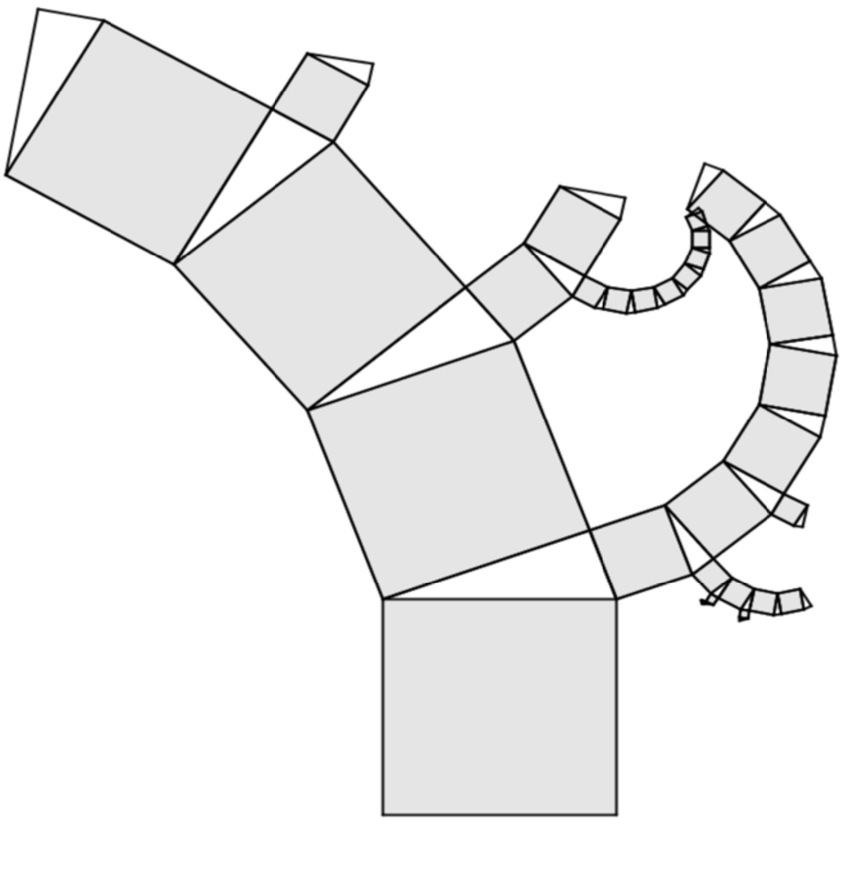


Avec des triangles rectangles non isocèles

Dans ce cas il n'y a plus d'axe de symétrie.
Voici un exemple de tracé avec des angles de 30° et 60° :

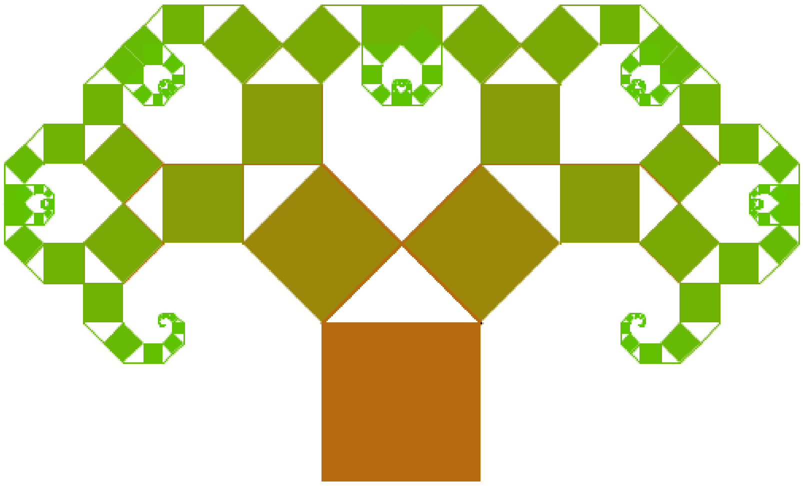


Il y a encore chevauchement à la 6$^{\text{ème}}$ étape. Est-ce toujours le cas ?
Voici un autre exemple avec des angles de 20°et 70°.



Il n'y a plus chevauchement à la sixième étape.
L'aire augmente à chaque étape de la même façon que pour le triangle rectangle isocèle (d'après le théorème de Pythagore, l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des 2 petits carrés).

Construction de l' Arbre de Pythagore avec le logiciel Géotortue



Pour voir un arbre de Pythagore grandir, nous avons utilisé un logiciel nommé géotortue. Dans ce logiciel on dirige une ou plusieurs tortues qui sur leur passage traceront des traits. Les tortues exécutent le programme ci-dessous qu'on a écrit.

Voici quelques commandes de base :

vg : effacer td : tourner à droite tg : tourner à gauche av : avancer re : reculer
à [nom de la tortue] : s'adresser à une tortue
tant_que : répéter une étape jusqu'à un point donné
rep : répéter une étape

Voici en intégralité le programme :

```
>vg
>à Achille ;a:=100
>x:=a
>tant_que (x>1) [ étape x ;x:=√ (x^2/2) ]
>à T1
>x:=a
>td 90; av x ;tg 90
>tant_que (x>1) [ miroir ;étape x ;x:=√ (x^2/2) ;miroir ]
>à T2
>x:=a
>étape a
>td 90
>tg 135
>av (√ (x^2/4))
>tant_que (x>1) [ étape (√ (x^2/4));x:= √ (x^2/2)]
>à T3
>x:=a
>td 90; av x ;tg 90
>miroir;étape a
>td 90
>tg 135
>av (√ (x^2/4))
>tant_que (x>1) [ étape (√ (x^2/4));x:= √ (x^2/2)]
>à T4
>x:=a
>étape a
>td 90
>tg 135
>av (√ (x^2/4))
>td 90
>av (√ (x^2/4))
>tg 90
>miroir ;tant_que (x>1) [ étape (√ (x^2/4));x:= √ (x^2/2)]
>à T5
>x:=a
>td 90; av x ;tg 90
>miroir;étape a
>miroir;td 45
>av (√ (x^2/4))
>miroir;td 90; av (√ (x^2/4));tg 90
>miroir;tant_que (x>1) [ étape (√ (x^2/4));x:= √ (x^2/2)]
>à T6
>x:=a
>étape x ;x:=√ (x^2/2)
>td 45;x:=a;av x
>tg 45
>av (√(x^2/8))
>;tant_que (x>1) [ étape (√ (x^2/8));x:= √ (x^2/2)]
>à T7
>x:=a
>td 90; av x ;tg 90
>miroir;étape x
>td 45;x:=a;av x
>tg 45
>av (√(x^2/8))
>;tant_que (x>1) [ étape (√ (x^2/8));x:= √ (x^2/2)]
>à T8
>x:=a
>td 90; av x ;tg 90
>miroir;étape x
>td 45;x:=a;av x
>tg 45
>av (√(x^2/8))
>td 45
>td 45
>av (√(x^2/8))
>tg 90
>miroir;tant_que (x>1) [ étape (√ (x^2/8));x:= √ (x^2/2)]
>à T9
>x:=a
>étape x ;x:=√ (x^2/2)
>td 45;x:=a;av x
>tg 45
>av (√(x^2/8))
>td 90
>av (√(x^2/8))
>tg 90
>miroir;tant_que (x>1) [ étape (√ (x^2/8));x:= √ (x^2/2)]
>à T10
>x:=a
>étape x ;x:=√ (x^2/2)
>td 45;x:=a;av x
>td 45
>av (√(x^2/8))
>td 90
>av (√(x^2/8))
>tg 90;av (√(x^2/8))
>miroir ;tant_que (x>1) [ étape (√ (x^2/8));x:= √ (x^2/2)]
>à T11
>x:=a
>td 90; av x ;tg 90
>miroir ;étape x ;x:=√ (x^2/2)
>td 45;x:=a;av x
>td 45
>av (√(x^2/8))
>td 90
>av (√(x^2/8))
>tg 90
>av (√(x^2/8))
>miroir
>tant_que (x>1) [ étape (√ (x^2/8));x:= √ (x^2/2)]
>à toutes ;ct
```

Procédure :

```
pour étape taille
 rep 4 [ td 90;av taille]; td 45
av (√ (taille^2/2))
td 90;av (√ (taille^2/2))
tg 90;tg 90;av (√ (taille^2/2))
td 90
av (√ (taille^2/2))
fin
```

Conclusion :

- A chaque étape, l'aire de tous les carrés ajoutés est égale à celle du premier carré.
- L'arbre de Pythagore reste à l'intérieur d'une certaine surface à chaque étape. La hauteur ajoutée n'est jamais égale à zéro mais elle s'en rapproche.
- Dans les arbres de Pythagore avec des triangles rectangles isocèles, les carrés de l'arbre se chevauchent à la sixième étape. Par contre avec des triangles rectangles non isocèles ce n'est pas toujours le cas.

Extension du problème : arbre construit avec des hexagones

Nous avons construit un arbre comme précédemment, en remplaçant les carrés par des hexagones réguliers. L'arbre présente encore une symétrie et il y a chevauchement à la 6ème étape .