Cet article est rédigé par des élèves.
Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans
les notes d'édition.

# Les feux de l'amour

Année 2013 - 2014

**Elèves de Seconde**: Mathieu Obis, Nawel Missenard, Elise Gabilly, Irina Barsuk, Marie Kalouguine.
**Etablissement** : Lycée Blaise Pascal, Orsay
**Enseignant** : Didier Missenard
**Chercheur** : Vincent Brault (laboratoire de mathématiques de l'université Paris-Sud Orsay

**Présentation du sujet :**

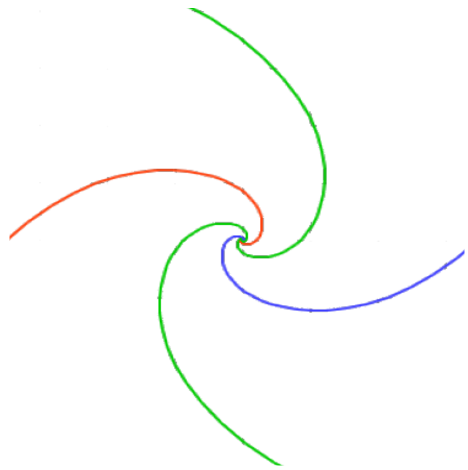
Quatre personnes participent à une émission de télé-réalité appelée les feux de l'amour. Chacun est amoureux de l'un des autres participants, sans que cela soit réciproque.

Tous au même moment, ils décident de se diriger vers l'élu de leur cœur. Nous voulons savoir si les personnages finiront par se rencontrer.

Nous étudions la trajectoire des personnages lors de ces déplacements.

## I) Le cas du carré

Pour ce cas, le studio de télévision est un carré, et chaque personnage est à un coin de ce carré. On place le studio dans un repère orthonormé, afin d'utiliser des vecteurs.



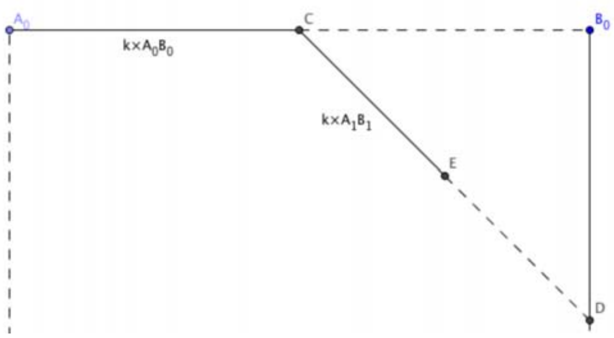
### 1. Le pas proportionnel

#### 1.1 Le calcul de la position

Nous étudions le mouvement des personnages lorsqu'ils parcourent à chaque déplacement une distance proportionnelle à la distance qui les sépare de leur bien aimé.

Par exemple, A est séparé de B, son amant, de *l* unités, et il parcourt une proportion *k* (avec *k* entre 0 et 1) de cette distance. On note $A_n$ la position du personnage A à la *n*-ième étape.

L'image suivante illustre la trajectoire des personnages, avec *k*=0,5.




Étant donné que A se déplace en direction de B, les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}$ et $\overrightarrow{A_0B_0}$ sont colinéaires, on a donc : $\overrightarrow{A_0A_1}=k\times\overrightarrow{A_0B_0}$

Nous avons donc trouvé une formule afin de calculer les coordonnées d'un personnage après son déplacement en fonction de ses coordonnées précédentes :

$$xA_n = xA_{n-1} + k(xB_{n-1} - xA_{n-1})$$
$$yA_n = yA_{n-1} + k(yB_{n-1} - yA_{n-1})$$
Avec *n* le nombre de déplacements effectués.

1.2 Distance parcourue

Nous avons cherché à déterminer la distance parcourue par les participants lorsqu'ils effectuent un pas proportionnel à la distance qu'il leur reste à parcourir. On prend $l_0$ la proportion qui est de $k \times d_0$ ($d_0$ est la distance séparant les deux points).

$$l_0 = k \times d_0$$

On a : $d_1^2 = (d_0 - k\, d_0)^2 + (k\, d_0)^2$

Donc : $d_1 = \sqrt{((1-k)^2 + k^2)} \times d_0$

Or : $l_1 = k \times d_1$
$$l_1 = k\sqrt{((1-k)^2 + k^2)}\, d_0 = \sqrt{((1-k)^2 + k^2)}\, l_0$$

Donc on a : $l_1 = \sqrt{((1-k)^2 + k^2)} \times l_0$

On obtient : $l_n = \sqrt{((1-k)^2 + k^2)}^n \times l_0$

On cherche la distance S parcourue par une personne : $S = l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \ldots$

Au bout de n déplacements on a :
$$S_n = l_0 + l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-1}$$

On nous a donné la formule pour la somme de termes d'une suite géométrique :
$$S_n = l_0 \times \frac{1 - \sqrt{((1-k)^2 + k^2)}^n}{1 - \sqrt{((1-k)^2 + k^2)}}$$

Or $\sqrt{((1-k)^2 + k^2)}^n$ tend vers 0 quand *n* tend vers l'infini, donc S tend vers :
$$l_0 \times \frac{1}{1 - \sqrt{((1-k)^2 + k^2)}} \quad (1)$$

On voit que plus *k* est grand, plus S se rapproche de la distance qui séparait les points au début.

2. Le pas constant

Nous étudions maintenant le mouvement des personnages lorsqu'ils parcourent une distance donnée *h* vers la personne qu'ils aiment.

La formule de la position calculée pour les pas proportionnels ne marche plus dans cette situation. Nous avons donc essayé de trouver une autre formule. Avec les vecteurs, on obtient la formule suivante pour calculer de nouveau les coordonnées en fonction des coordonnées précédentes :

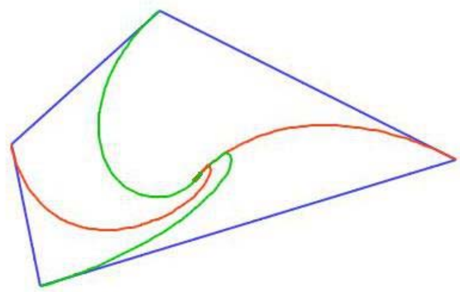
$$xA_{n+1} = \frac{h}{A_n B_n} \times x_{\overrightarrow{A_n B_n}} + xA_n$$
$$yA_{n+1} = \frac{h}{A_n B_n} \times y_{\overrightarrow{A_n B_n}} + yA_n$$

## II) Les Quadrilatères irréguliers

Nous étudions le cas où le quadrilatère n'est pas un carré. Nous utilisons de nouveau le logiciel de programmation Algobox.

Nous préférons le pas proportionnel au pas fixe, puisqu'il est le plus efficace. Vu que toutes nos formules pour le pas proportionnel sont fondées sur les propriétés des vecteurs (cf. partie I section 1.1), ces formules doivent aussi marcher pour des quadrilatères irréguliers.

Nous varions les formes des quadrilatères des parallélogrammes aux quadrilatères non-convexes. Mais à chaque fois, on remarque que, plus on progresse



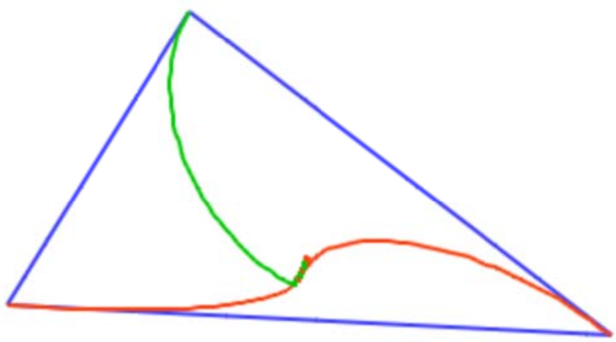
dans le nombre de pas, plus la forme du dernier quadrilatère se rapproche d'un parallélogramme. Nous remarquons que le centre de ce parallélogramme se rapproche du centre de gravité du quadrilatère initial.

## III) Variations du nombre de participants

Nous varions aussi le nombre de personnages amoureux dans cette émission, par exemple 3 ou 5 participants, en restant sur des nombres de participants supérieurs à 2. S'il y a deux participants, le polygone serait un segment et les participants ne pourraient que se rencontrer.

Nous appliquons les mêmes formules pour le pas proportionnel, vu qu'il marche pour des polygones ne comportant pas d'angles droits. Nous utilisons encore Algobox et le tableur pour afficher les coordonnées consécutives des participants, et Geogebra pour visualiser la trajectoire des participants.

Nous ne travaillons que sur les polygones réguliers, mais on suppose que les polygones irréguliers sont aussi possibles, tout comme pour les quadrilatères irréguliers. Nous remarquons que les polygones obtenus sont tous réguliers et ont un centre de gravité commun.

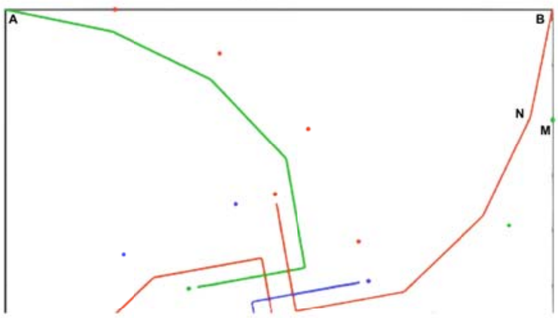


### IV) Anticipation d'un mouvement

1. <u>Anticipation d'un mouvement par tous les personnages</u>

Nous étudions ici le cas où chaque personnage sait que la personne élue par son cœur est amoureuse de la suivante. Ainsi les participants anticipent les mouvements de la personne qu'ils aiment et peuvent calculent ses futures coordonnées.

Nous schématisons ici ce cas de figure à l'aide du logiciel Algobox.

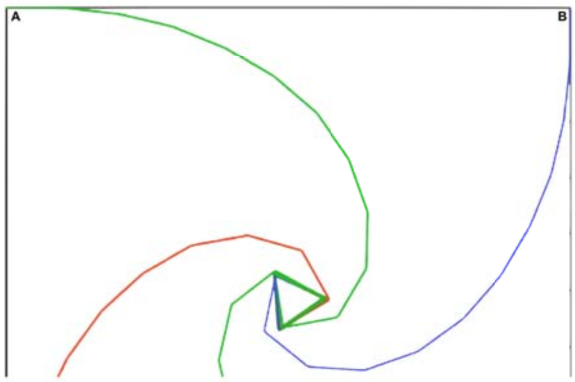



Sur le schéma, A et B sont les positions initiales des personnages du même nom, M la position de B présumée que calcule A, mais étant donné que B anticipe lui aussi la position de celui qu'il aime, sa position réelle est en N.

On voit que les participants se rapprochent du centre mais ne se rencontrent toujours pas.

2. <u>Anticipation d'un mouvement par un seul personnage</u>

Nous envisageons ici qu'un seul des participants anticipe le mouvement de l'élue de son cœur. Nous schématisons ce deuxième cas à l'aide du logiciel Algobox.




Au bout d'un certain nombre de déplacements, A, qui est amoureux de B et anticipe les mouvements, arrive finalement à rencontrer B. Pour la suite, au lieu de « tourner » sur les angles d'un carré, il sont sur les angles d'un triangle, B et A étant confondus.

**Conclusion :**

On voit que les personnages, lorsqu'ils sont ponctuels, ne peuvent pas se rencontrer sauf si un seul d'entre eux anticipe les mouvements de son amant. Toutefois, si les personnages sont physiques(2), ils se rencontreront forcément.

## Notes de l'édition

(1) Résultat non évident, manquant de justifications.

(2) Il serait plus clair de parler de « personnages non ponctuels ».