

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Liaisons Satellites

Année 2023 – 2024

Marwa BELHASSAN, Orel GAO, élèves de classe 2GT7

Établissement(s) : Lycée Polyvalent Raynouard

Enseignant-e(s) : Denis GUICHETEAU, Nelly MOURAU

Chercheur-Chercheuse(s) : Thierry Champion, Imath et Frédéric Havet, INRIA.

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Une chaîne de télévision souhaite faire passer leurs signaux par satellite pour que ses programmes TV puissent être renvoyés sur les télévisions des spectateurs.

Ces signaux sont émis depuis la Terre pour être envoyés vers ces satellites.

Les antennes d'émission et de réception sont placées les unes en face des autres, deux à deux, pour faire circuler ces signaux.

Dans certains cas, des pannes se produisent sur les antennes qui émettent et reçoivent les signaux.

Pour contrer ça, des commutateurs peuvent être placés afin que les signaux envoyés depuis la Terre puissent être reliés à plusieurs antennes à la fois. Un commutateur peut être relié au maximum avec 4 antennes ou commutateurs grâce à des pattes qui vont permettre de faire circuler les signaux.

Le problème est le suivant : ces commutateurs ont un coût plutôt élevé et le but est donc d'en mettre le minimum en fonction du nombre de pannes estimées.

1.2. Résultats

1.2.1. Faire passer au moins un signal :

Le premier théorème que l'on a trouvé concerne le cas où on souhaite faire passer au moins un signal entre les antennes.

Si le nombre de pannes est strictement inférieur à la moitié du nombre d'antennes, alors il n'est pas nécessaire de mettre des commutateurs.

Lorsque ce n'est pas le cas, **le nombre de commutateurs sera obligatoirement égal au nombre de panne.**

1.2.2. Faire passer le maximum de signaux :

Par la suite, on a dressé des hypothèses qui répondent à de nouvelles contraintes, il faut faire passer un maximum de signaux possible et empêcher à plusieurs signaux de passer par la même patte de commutateur.

Dans le cas où l'on a un nombre maximum de pannes (donc le nombre d'antennes -1) , on peut réutiliser le modèle de la première partie, c'est-à-dire que le nombre de commutateurs sera égal au nombre de pannes.

Si ce n'est pas le cas, peu importe le nombre de pannes, un modèle évolutif sera suivi selon le nombre d'antennes. Lorsque l'on a entre **3 et 5 antennes** de chaque côté, on aura besoin de 2 chemins (lien qui permet de relier les antennes du haut aux antennes du bas), ce qui revient à 1 ligne de commutateurs, ainsi **le nombre de commutateurs sera égal au nombre d'antennes de chaque côté.**

Entre **6 et 9 antennes** de part et d'autre, il est nécessaire d'avoir 4 chemins, ce qui revient à 2 lignes de commutateurs, ainsi **le nombre de commutateurs sera égal à deux fois le nombre d'antennes de chaque côté.**

A chaque fois que l'on va augmenter de 4 antennes, on va ajouter également 2 chemins et 1 ligne de commutateur.

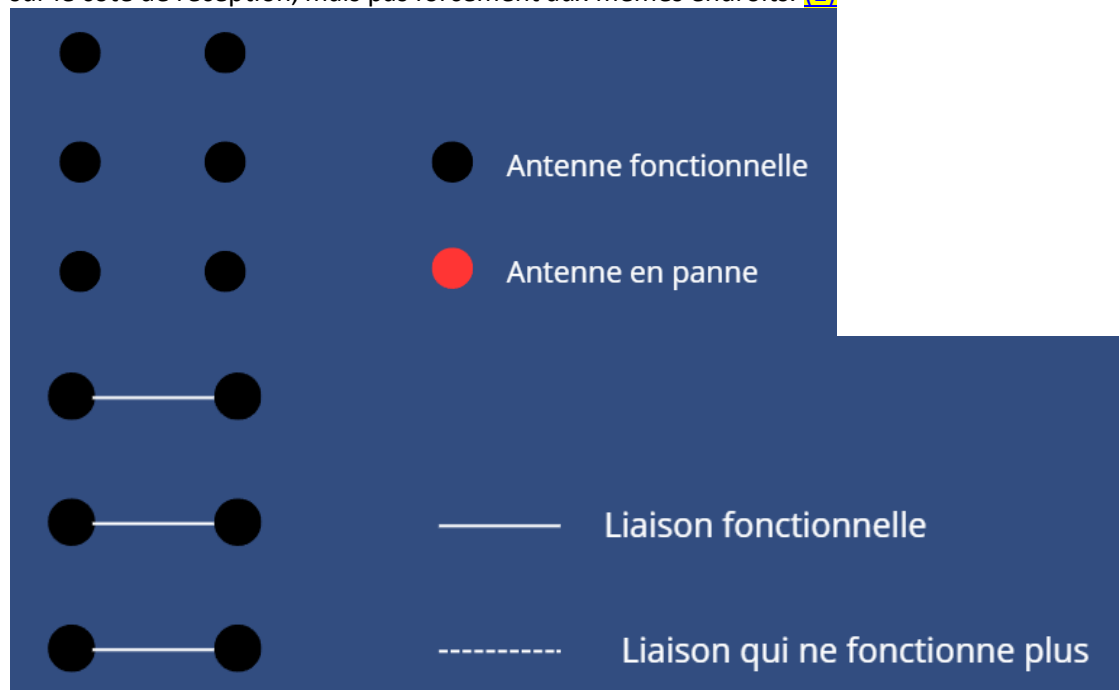
2. Travail de recherche

2.1. Premier objectif : faire passer au moins un signal.

Après lecture de notre sujet, nous nous sommes directement imposé un premier objectif pour éviter tout égarement. Il nous fallait faire passer au moins un signal, tout en sachant que même si l'on connaît le nombre de pannes, on ne sait pas où elles se trouvent dans le système.

2.1.1. Explications du fonctionnement

Les antennes de réception et d'émission sont reliées les unes aux autres et font ainsi passer un signal entre elles par une liaison. Selon la configuration, on en retrouve un certain nombre de chaque côté. Lorsque l'on dit que l'on a une panne, cela signifie que l'on a une sur le côté d'émission et une autre sur le côté de réception, mais pas forcément aux mêmes endroits. (1)



2.1.2. Une antenne de chaque côté

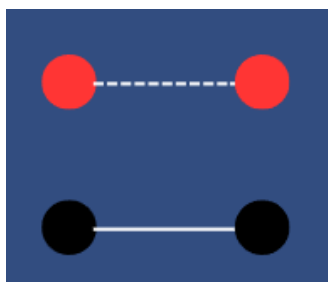
Avec une antenne de chaque côté et aucune panne, tout va bien, on n'a besoin de rien changer (ce sera pareil pour toutes les autres configurations). Cependant lorsque l'on a une panne de chaque côté cela ne sert à rien de chercher car le seul signal qui peut potentiellement passer est bloqué.



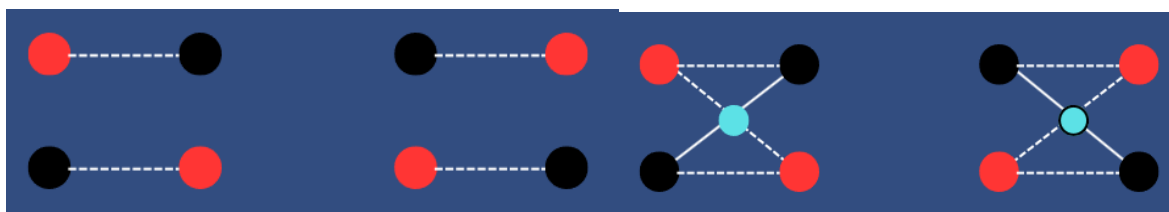
2.1.3. Deux antennes de chaque côté

Avec deux antennes de chaque côté et une panne de chaque côté on a deux possibilités:

- Les pannes sont alignées et donc les antennes fonctionnelles également ce qui fait que l'on n'a pas besoin de mettre de commutateur, car il y a au moins un signal qui passe.



- Les pannes sont croisées et donc les antennes fonctionnelles aussi ce qui fait que l'on n'a plus aucun signal qui passe, ainsi il faudra un commutateur. Avec un seul commutateur, on remarque qu'au moins un signal passe, la situation est donc réglée.

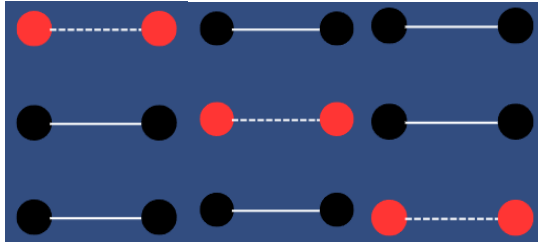


On ne peut pas essayer avec deux pannes car quoi qu'il arrive aucun signal ne passera.

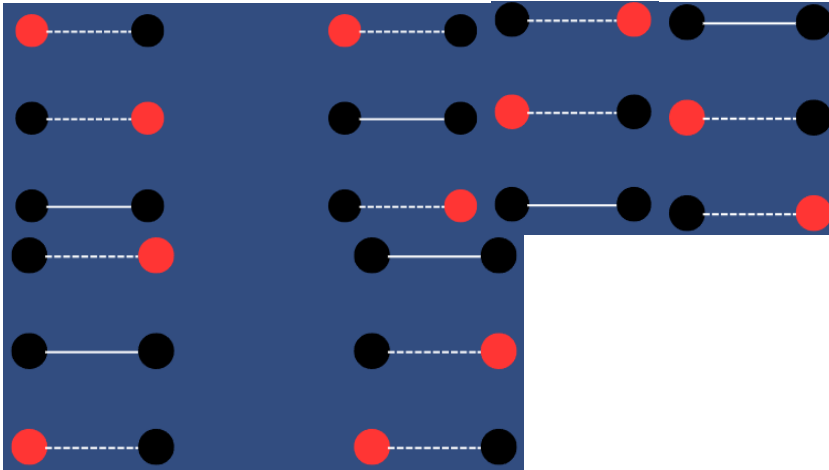
2.1.4. Trois antennes de chaque côté

Avec trois antennes de chaque côté et une panne de chaque côté on a deux possibilités:

- Les pannes sont alignées tout comme les antennes fonctionnelles, ainsi on n'a pas besoin de mettre de commutateur car il y a au moins un signal qui passe.

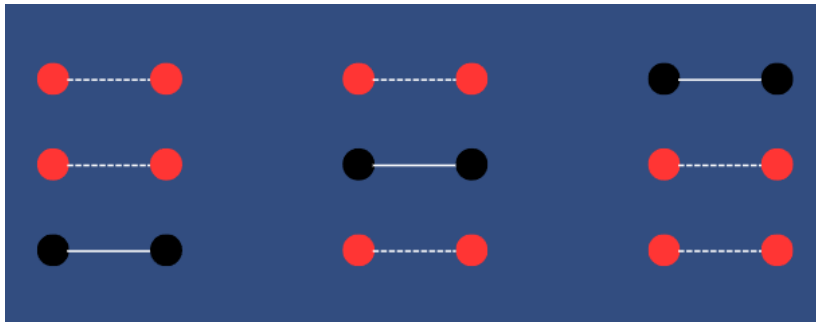


- Les pannes sont croisées, on a essayé toutes les possibilités et on a remarqué à chaque fois qu'il n'était pas nécessaire de mettre des commutateurs car il y a toujours un signal qui passe.

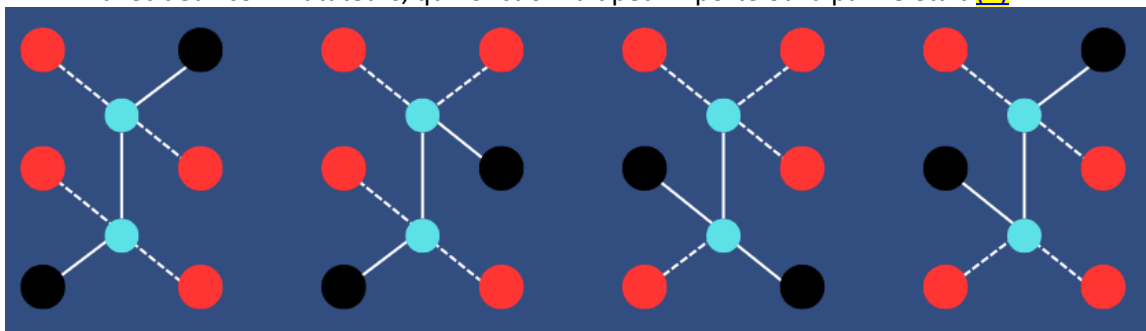


Avec trois antennes de chaque côté et deux panne de chaque côté on a également deux possibilités:

- Les pannes sont alignées tout comme les antennes fonctionnelles, ainsi on n'a pas besoin de mettre de commutateur car il y a au moins un signal qui passe.



- Quand elles ne le sont pas, il n'y a pas de signal qui passe, on a donc besoin de mettre des commutateurs. On a testé toutes les configurations et celle qui marchait le mieux était celle avec deux commutateurs, qui fonctionnait peu importe où la panne était. [\(2\)](#)



2.1.5. Résultats et analyse

Avec les résultats précédents et d'autres recherches, on a pu dresser un tableau qui récapitule nos différents essais:

antennes par côté: n	pannes: k	commutateurs: c
2	1	1
3	1	0
3	2	2
4	1	0
4	2	2
4	3	3
5	1	0
5	2	0
5	3	3
5	4	4

(3) La première colonne représente le nombre d'antennes de chaque côté, la seconde le nombre de pannes et la dernière le nombre minimal de commutateurs que l'on a trouvé selon la configuration.

En regardant ce tableau en détail on s'est aperçu de certains faits marquants qui nous ont permis de repérer quelques hypothèses et des schémas qui se renouvellent.

On s'est rendu compte que lorsque le nombre de pannes était strictement inférieur à la moitié du nombre d'antennes, il n'était pas nécessaire de mettre des commutateurs (ex: 3 antennes, 1 panne on utilise 0 commutateur, 5 antennes, 2 pannes on utilise 0 commutateur).

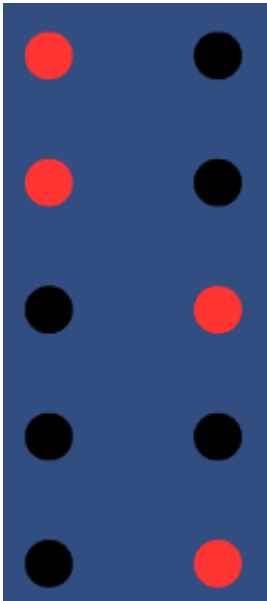
Quand ça n'était pas le cas, on a conjecturé que le nombre de commutateurs était égal au nombre de pannes (ex: 4 antennes, 3 pannes on utilise 3 commutateurs).

2.1.6. Démonstrations

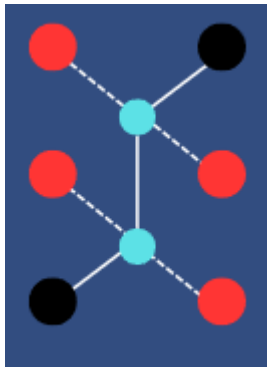
Pour démontrer cela et donc confirmer que ces hypothèses fonctionnaient peu importe le nombre d'antennes, on a réfléchi à des démonstrations précises qui semblent plutôt bien s'appliquer. Les voici (k représente les pannes, c le nombre de commutateurs et n les antennes):

- Si on a moins de la moitié des antennes en panne, alors $k < \frac{n}{2}$ donc les pannes pourront bloquer deux fois k liaisons. Or on sait que $2k < n$ donc on aura toujours une liaison

fonctionnelle soit au moins un signal qui passe. Ainsi on affirme que lorsque le nombre de pannes est strictement inférieur à la moitié du nombre d'antennes, il n'est pas nécessaire de mettre des commutateurs.

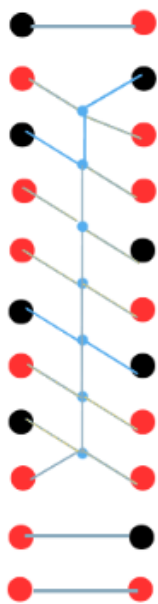


- Si $k \geq \frac{n}{2}$, on peut bloquer k liaisons directes d'un côté, k liaisons directes de l'autre, soit au total $2k \geq n$ liaisons directes donc il faut des commutateurs. Avec k commutateurs on peut relier $k + 1$ antennes entre elles donc pour k pannes (4), il reste 1 antenne de libre de chaque côté. Donc k sera égal à c . Ainsi lorsque le nombre de pannes est supérieur ou égal à la moitié de nombre d'antennes, le nombre de commutateurs sera égal au nombre de pannes. (5)



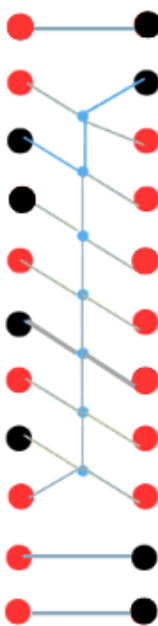
2.1.7. Dernier test

On a voulu vérifier une dernière fois nos conjectures en tentant une configuration plus grande. Soit 11 antennes de chaque côté et 7 pannes de part et d'autre. La logique voudrait que l'on mette 7 commutateurs, on a essayé avec un certain emplacement des commutateurs et on s'est rendu compte que 3 signaux pouvaient passer, on s'est donc demandé s'il n'était pas possible d'enlever des commutateurs.



11 antennes, 7 pannes, 7 commutateurs ; 3 liaisons fonctionnelles.

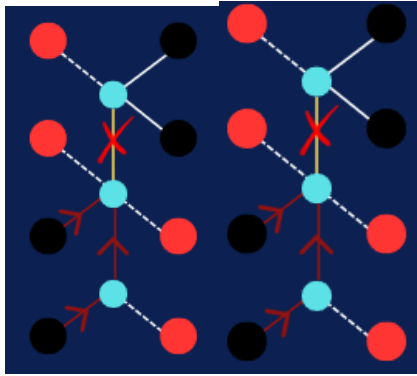
Cependant, on s'est vite rappelé que l'on ne savait pas l'emplacement de départ des pannes, ainsi il nous suffit seulement de déplacer les pannes pour se rendre compte que dans cette nouvelle configuration, enlever un commutateur serait préjudiciable et porterait souci pour le passage d'un signal. Ainsi, ce test nous a permis de confirmer définitivement nos hypothèses.[\(6\)](#)



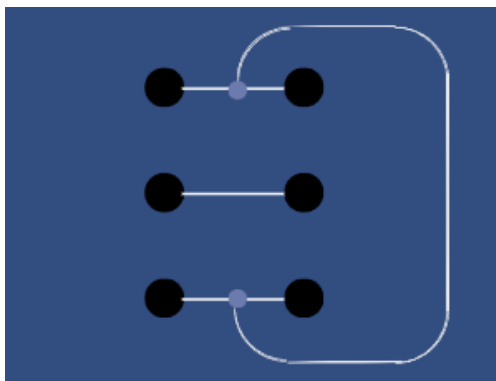
11 antennes, 7 pannes, 7 commutateurs ; 1 liaison fonctionnelle.

2.2.1. Nouvel objectif, nouvelles contraintes, nouvelle possibilité

Maintenant que l'on a résolu notre premier problème, on s'est rajouté de nouvelles contraintes. Dans un premier temps, contrairement à la première partie, un seul signal ne sera pas suffisant, il faut en mettre un maximum. En plus de cela, il nous sera impossible de faire passer deux signaux par une même patte.



Pour essayer d'un peu contrer ce problème, nous avons réfléchi à une nouvelle possibilité pour relier nos antennes avec les commutateurs. Avec cette nouvelle technique, il est facilement possible de relier les antennes du haut avec celles du bas en passant par le côté.

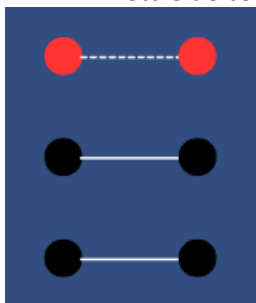


2.2.2. Petits tests

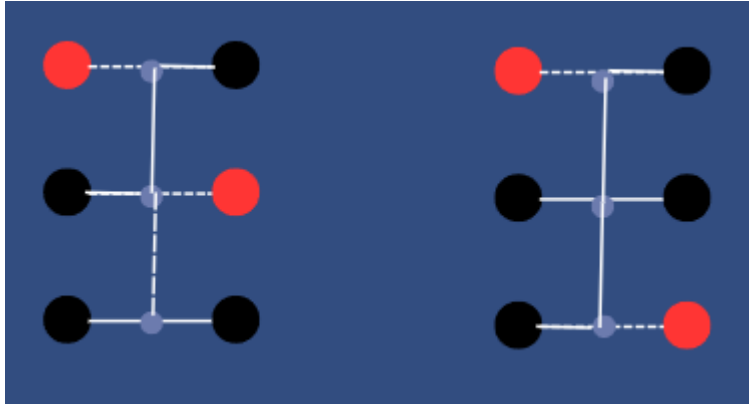
Nous n'avons pas fait autant de tests que dans la première partie par manque de temps mais nous avons tout de même réussi à en tirer quelques hypothèses.

Nous avons commencé nos tests avec 3 antennes de chaque côté et 1 panne, deux possibilités se sont offertes à nous:

- Les pannes sont alignées tout comme les antennes fonctionnelles, ainsi on n'a pas besoin de mettre de commutateur car il y a le nombre maximal de signaux qui passe.

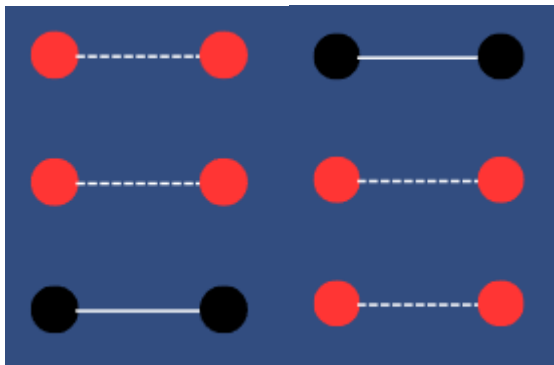


- Quand elles ne le sont pas, il n'y a pas tous les signaux qui passent, on a donc besoin de mettre des commutateurs, on a testé plusieurs configurations et celle qui marchait le mieux était celle avec trois commutateurs, qui fonctionnait peu importe où la panne était.

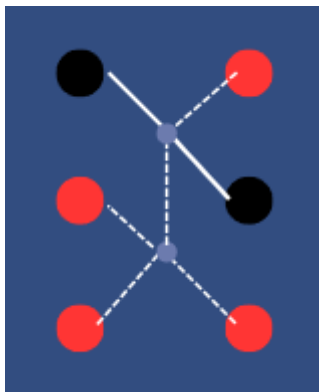


Nous avons donc testé avec 3 antennes et 2 pannes, deux possibilités étaient également de mise:

- Les pannes sont alignées tout comme les antennes fonctionnelles, ainsi on n'a pas besoin de mettre de commutateur car il y a le nombre maximal de signaux qui passe.



- Quand elles ne le sont pas, il n'y a pas de signaux qui passe, on a donc besoin de mettre des commutateurs, on a testé plusieurs configurations et celle qui marchait le mieux était celle avec deux commutateurs, qui fonctionnait peu importe où la panne était.



2.2.3. Première hypothèse

La deuxième partie des tests nous donne une hypothèse facilement prouvable. Lorsque l'on a un maximum de pannes (c'est-à-dire le nombre n d'antenne moins 1), on pourra réutiliser l'une des configurations de la première partie. Quand on a un nombre maximum de pannes, il ne faut faire

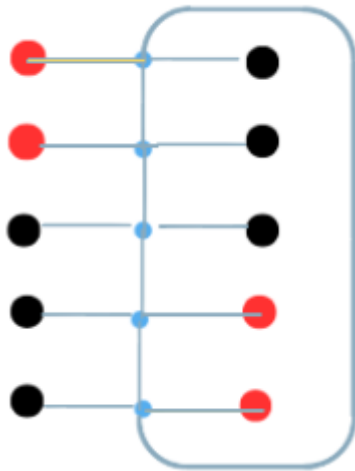
passer qu'un seul signal, ainsi si on suit la logique de la première partie, le nombre de commutateurs sera égal au nombre de pannes.

2.2.4. Conjectures incertaines

On a été poussé à de fortes réflexions et à de nombreuses tentatives pour trouver quelques conjectures qui ne sont pas entièrement vérifiées.

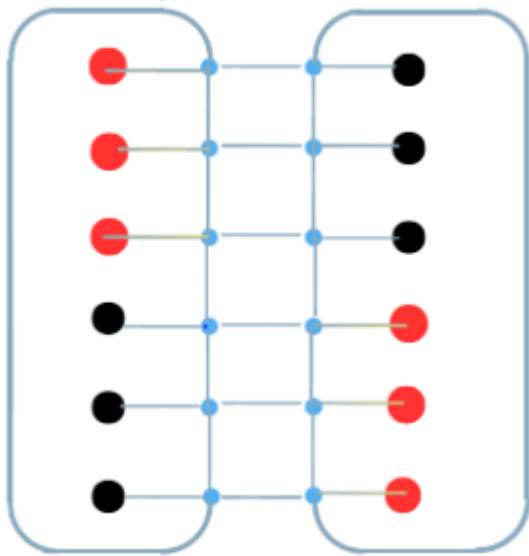
On s'est aperçu que lorsque l'on a entre 3 et 5 antennes de chaque côté et peu importe le nombre de pannes, il était nécessaire d'avoir 2 chemins (un chemin est ce qui relie les antennes du haut aux antennes du bas) et donc 1 ligne entière de commutateurs. Ce qui fait que le nombre de commutateurs sera égal au nombre d'antennes.

Exemple avec 5 antennes



Avec entre 6 et 9 antennes, il fallait 4 chemins, soit 2 lignes de commutateurs. Ainsi, peu importe le nombre de pannes, le nombre de commutateurs sera égal au double du nombre d'antennes.

Exemple avec 6 antennes



Avec entre 10 et 13 antennes, il fallait 6 chemins, soit 3 lignes de commutateurs. Ainsi, peu importe le nombre de pannes, le nombre de commutateurs sera égal au triple du nombre d'antennes.

Ce schéma se répète à l'infini, à chaque fois que l'on ajoute 4 antennes, on ajoute également 2 chemins et donc 1 ligne de commutateurs.

3. Par la suite...

Dorénavant, il nous sera nécessaire de retravailler quelques-unes de nos parties. Dans un premier temps, on devra démontrer la deuxième partie, bien vérifier que c'est la meilleure configuration possible ou voir si on ne peut pas enlever des commutateurs. Après cela, on souhaiterait mettre un nombre différent d'antennes de part et d'autre (ex: 5 antennes d'émission, à droite, et 3 antennes de réception, à gauche) ou encore un nombre différent de panes de chaque côté.

Notes d'édition

(1) Ici, les auteurs font le choix de considérer que le nombre de panes du côté de l'émission est égal au nombre de panes du côté de la réception. On pourra également se demander ce qu'il se passe lorsque le nombre de panes n'est pas le même de chaque côté.

(2) On pourra se demander pourquoi lorsqu'on ne met qu'un seul commutateur, il est possible que la panne persiste.

(3) Les sections précédentes n'ont permis de compléter que les trois premières lignes de ce tableau. Des raisonnements similaires lorsqu'il y a 4 ou 5 antennes de chaque côté permettraient d'obtenir les sept dernières lignes du tableau.

(4) Il est sous-entendu qu'on parle de $k+1$ antennes d'un même côté.

(5) On voit que lorsqu'on a k panes de chaque côté, il suffit de k panes pour s'assurer qu'un signal passe. On pourra se demander pourquoi il n'est pas possible d'en utiliser moins en général.

(6) On pourra se demander si ces derniers tests sont représentatifs d'une situation générale. Permettent-ils de s'assurer qu'on ne peut effectivement pas faire encore mieux ?