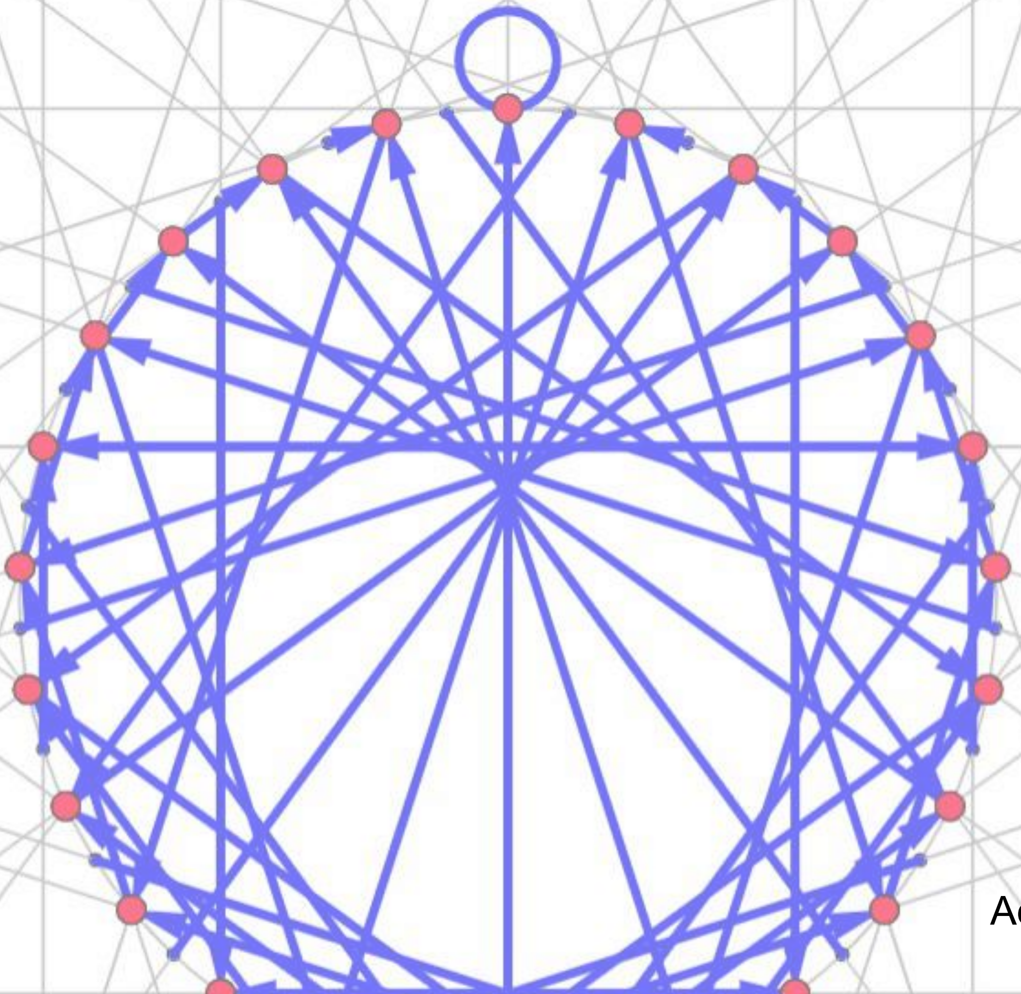


# Présentation Maths En Jean

## Arrow clocks
## Horloges à flèches

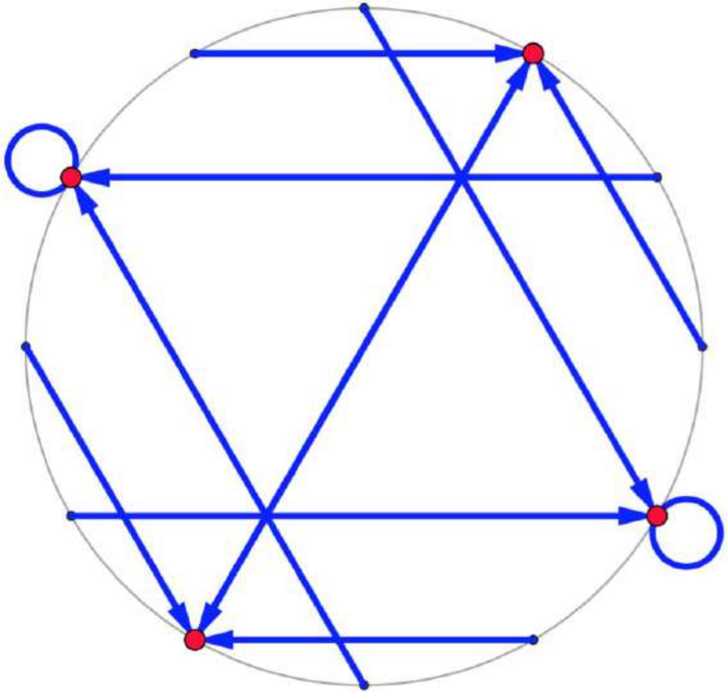
Adam Bayle, Mathis Duguin, Anouck Maréchal,
Matéo Pirio Rossignol et Clémie Teston

# Sommaire

I. Outils mathématiques
   A. Définition intuitive d'une fonction
   B. La congruence
   C. Explication du concept

II. Fonctions affines : f(x) = ax+b
   A. a = 0, fonction du type x → b
   B. a = 1, fonction du type x → x+b
   C. b = 0, fonction du type x → ax
   D. a = 2, fonction du type x → 2x+b
   E. Étude des parallélismes

III. Fonctions puissance : f(x) = ax^b
   A. a = , fonction du type x → x^b
   B. a = 2, fonction du type x → 2(x^b)
   C. a = 3, fonction du type x → 3(x^b)
   D. Les autres cas

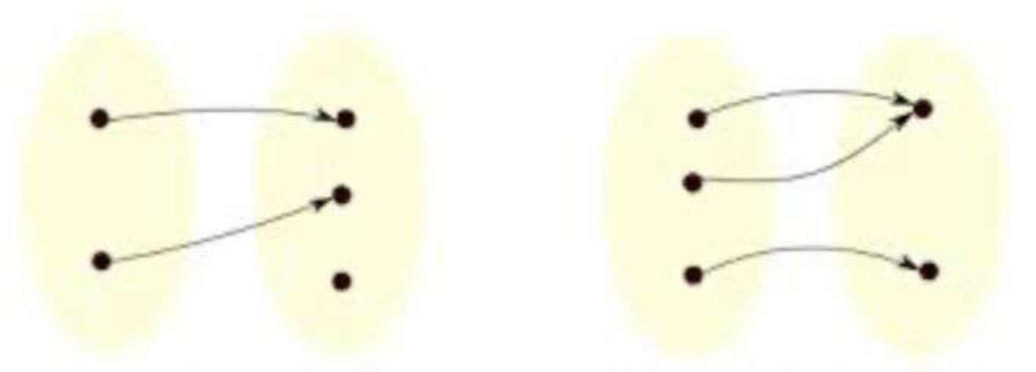


Site utilisé lors de notre travail : [https://www.geogebra.org/m/ZUDcUk2C](https://www.geogebra.org/m/ZUDcUk2C)

# OUTILS MATHÉMATIQUES

# I.A. Définition intuitive d’une fonction

C’est un objet qui associe chaque élément d’un ensemble de départ à un élément d’un autre (ou du même) ensemble d’arrivée.



Les ovals beige étant les ensemble, les points noirs les éléments de ces ensembles, et les flèches décrivent ce que fait la fonction.

Deux flèches peuvent mener au même élément d’arrivée, mais deux flèches ne peuvent pas partir d’un même élément de départ.
Il peut y avoir des éléments de l’ensemble d’arrivée sur lesquels aucune flèche n’arrive, mais tous les éléments de l’ensemble de départ sont le point de départ d’une flèche.

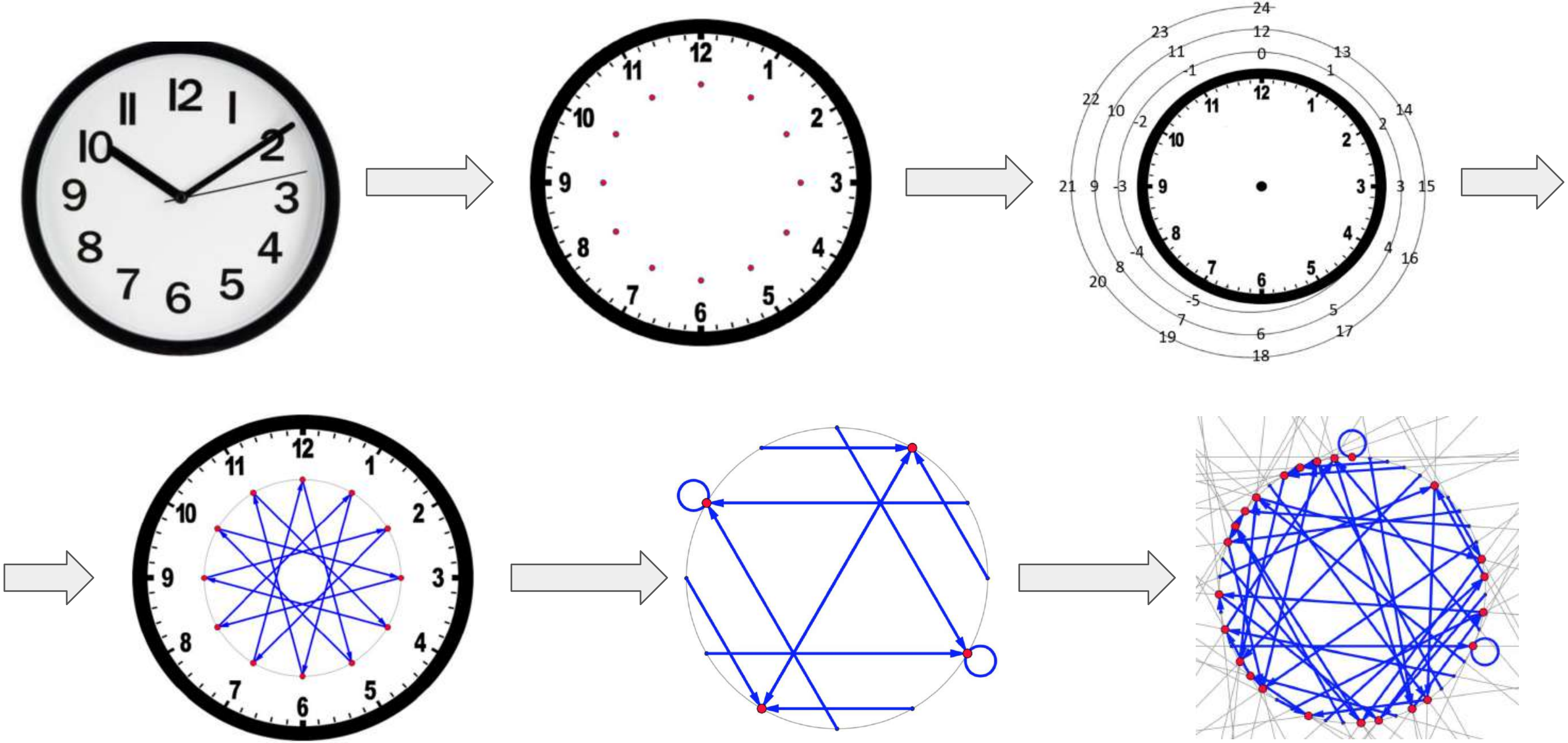
# I.B. La congruence

Quand il est 15h, il est aussi 3 heures de l'après-midi. On a envie d'écrire 15 = 3 mais ça ne précise pas qu'on parle d'heures, et que c'est une équivalence et pas une véritable égalité des quantités…
15 = 3 [12] signifie que 15 et 3 sont équivalents, “congrus”, “modulo 12”, soit à 12 heures près. On peut de même écrire 27 = 15 = 3 [12]. Ceci nous permet de généraliser un peu le concept des heures et on le visualise avec les horloges de la diapositive suivante.

La similarité avec l'égalité est flagrante : on peut ajouter une même quantité aux deux membres, les multiplier, appliquer un exposant… Mais pas diviser au sens strict.

Dans la suite, on désignera par n le nombre de points sur le cercle.

# I.C. Explication du concept

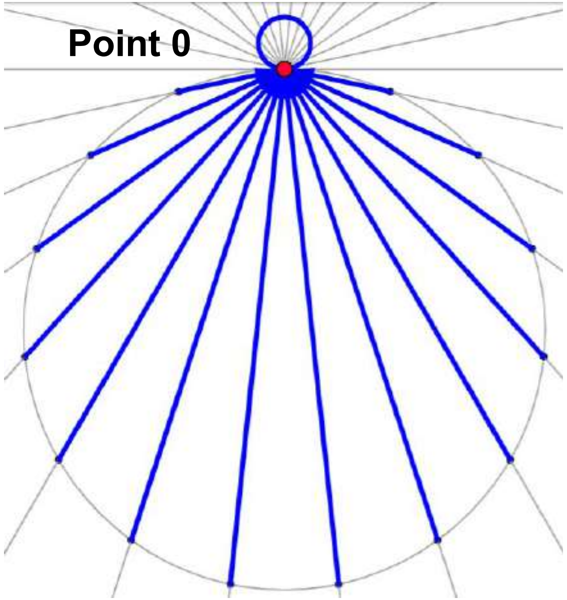


# FONCTIONS AFFINES

## $X \rightarrow AX+B$

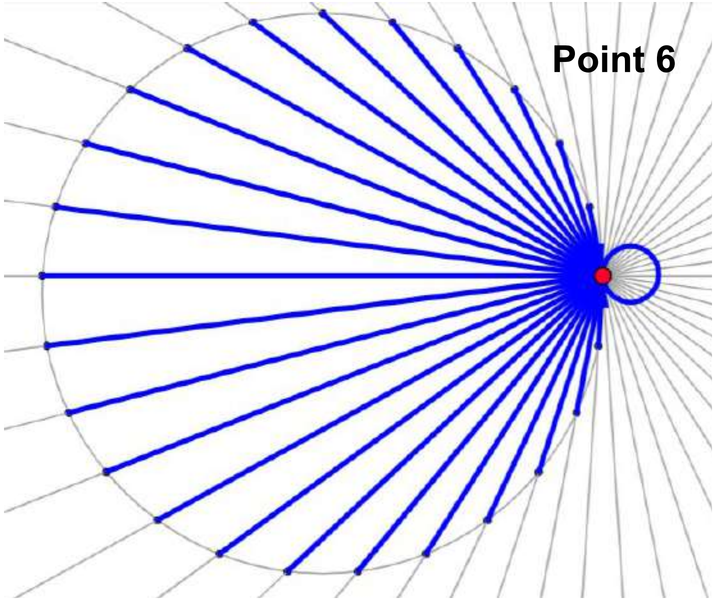
# II.A. a = 0, fonction de type x → b

Pour tout n appartenant à N* et pour tout b appartenant à N, chaque point rejoindra le point qui correspond à la valeur de b. Si on fait varier b de 1 à chaque fois, la figure va aussi se décaler de 1. Dans le cas où on fait varier n, le nombre de flèche va augmenter vu qu'il y aura plus de points sur le cercle.




← n = 15 ; b = 0

n = 26 ; b = 6 →

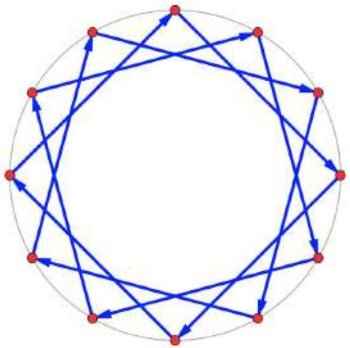


# II.B. a = 1, fonction de type x → x + b

La formule pour déterminer les angles au sommet de la figure :

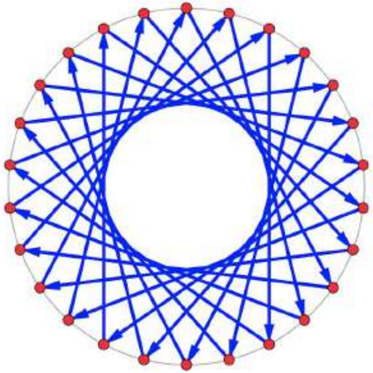
| 180- ((360*b) / n) |  [360] en degrés

On peut trouver cette formule en considérant le triangle formé par le centre, un point A et le point B où la flèche du point A arrive. Il faut utiliser le fait que la somme des angles d’un triangle vaut 180 degrés et la symétrie de la figure qui fait du triangle un triangle isocèle. Les angles sont tous identiques par symétrie. En radiant cela correspond à : (n-2b)pi/n.



Ici : n = 12 et b = 15

L’angle mesure 90°, résultat retrouvé avec la formule.



Ici : n = 26 et b = 9

L’angle mesure 55°, résultat retrouvé avec la formule.

# II.B. a = 1, fonction de type $x \to x + b$

Si l'on raisonne modulo n, échanger b par -b, le sens des flèches est inversé. Cela peut se comprendre si l'on prend x la valeur d'un point du cercle et b la valeur de b. Ce que la première phrase signifie, c'est que la fonction qui à x associe x+b modulo n, fait le chemin inverse de la fonction qui a x associe x-b modulo n. Si l'on utilise ces deux fonctions l'une après l'autre, c'est comme revenir à son point de départ, ce qui est cohérent avec notre histoire de flèche.

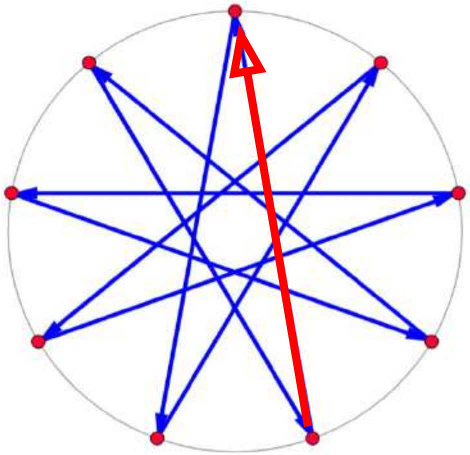
Mais si n est pair, b est congru à -b modulo n lorsque $b = n/2$ [n]. Alors les flèches ne semblent pas s'inverser mais c'est pour la seule raison qu'elles sont déjà bidirectionnelles. En effet, $x+n/2 - n = x-n/2$ d'où $x+n/2 = x-n/2$ [n].

# II.B. a = 1, fonction de type x → x + b

Pour cet exemple, on choisit les valeurs suivantes :

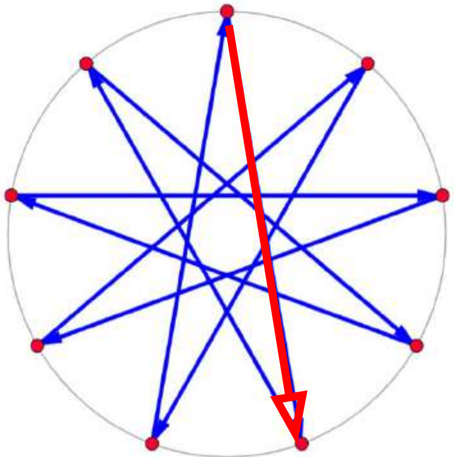
n = 9 b = 5 -b = -5

On obtient alors : b = 5 (9) -b = -5 (9) = 4 (9)



**b = 5**

On observe une même forme, seulement les flèches sont inversées.

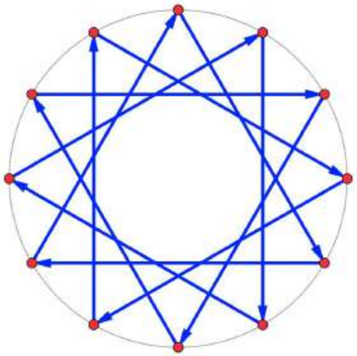


**-b = -5**

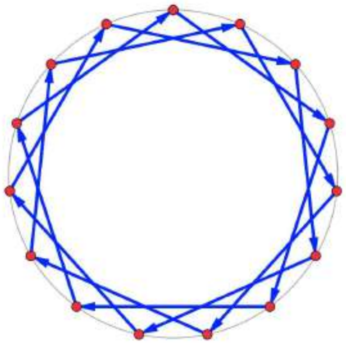
# II.B. a = 1, fonction de type $x \to x + b$

Lorsque b est congru à un diviseur de n (distinct de n) alors les flèches forment un nombre b de polygones réguliers de n/b côtés. Cela ne marche pas lorsque b = n/2 [n] car on aurait un polygone à 2 côtés.

Cela se traduit mathématiquement par b ensembles disjoints de n/b valeurs comprises entre 0 et n-1 tels que lorsqu'on leur applique la fonction n/b fois, on retrouve la valeur initiale.



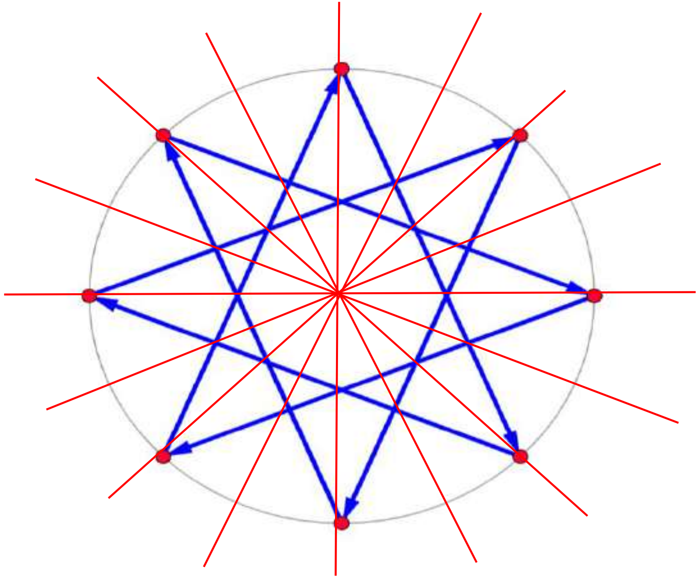
Ici n = 12 et b = 4
On a bien 4 polygones à 3 côtés (4 triangles).



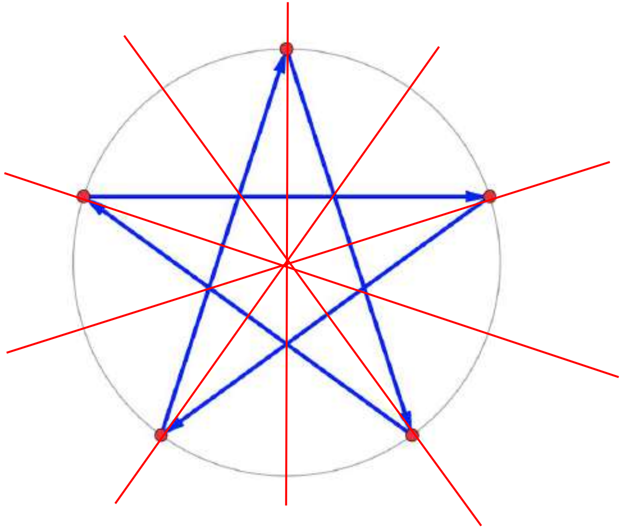
Ici n = 15 et b = 3
On a bien 3 polygones à 5 côtés (3 pentagones).

# II.B. a = 1, fonction de type x → x + b

Si n est un nombre pair, alors quelque soit le nombre b choisi, il existera toujours des axes de symétrie axiale. Plus précisément, on obtiendra n axes de symétrie.



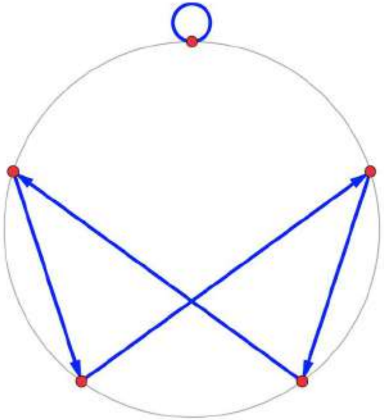
n = 8 et b = 3
8 axes de symétrie



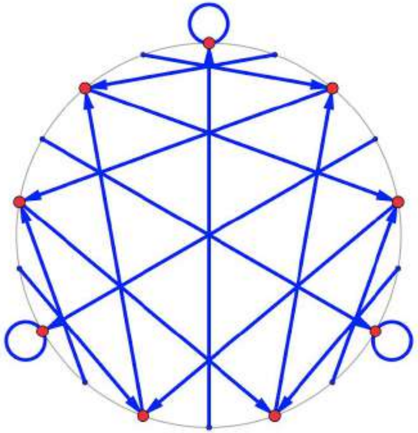
n = 5 et b = 7
5 axes de symétrie

# II.C. b = 0, fonction de type x → ax

Le nombre de points fixes, visibles par une flèche formant un cercle sur notre outil, est égal à PGCD(n,a-1).



n = 5 et a = 7
PGCD(5,6) = 1
On a bien 1 point fixe.



n = 18 et a = 16
PGCD(18,15) = 3
On a bien 3 points fixes.

# II.C. b = 0, fonction de type x → ax

Chaque point est le point de départ d'une flèche, mais tous les points ne sont pas forcément la destination d'une flèche : la formule n/PGCD(a,n) indique le nombre de points cibles (en particulier, si n est premier alors il y a n points cibles). Comme a*0=0, le premier point cible est toujours en 0.

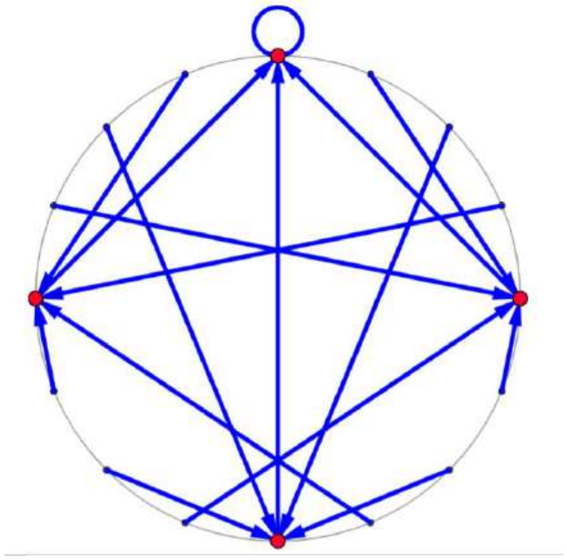
n = 16    a = 4

PGCD(4,16) = 4

n/PGCD(a,n) = 16 / 4 = 4

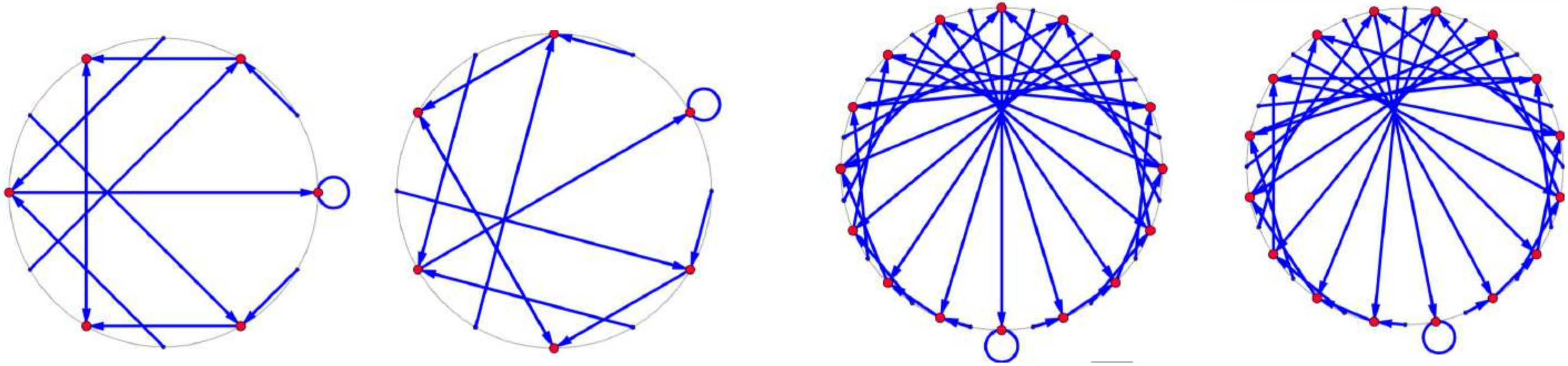
→ Il y a donc 4 points cibles

( 4, 8, 12, 16)



# II.D. a = 2, fonction de type y = 2x + b

Pour un nombre n fixe, on obtient une forme qui en fonction de b se décale de 1 en 1 dans le sens inverse des aiguilles d’une montre :



n = 12

b = 9

b = 10

n = 32

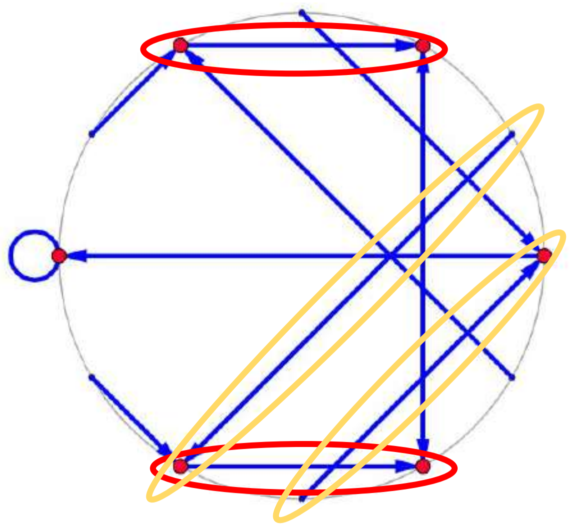
b = 16

b = 17

# II.E. Étude des parallélismes

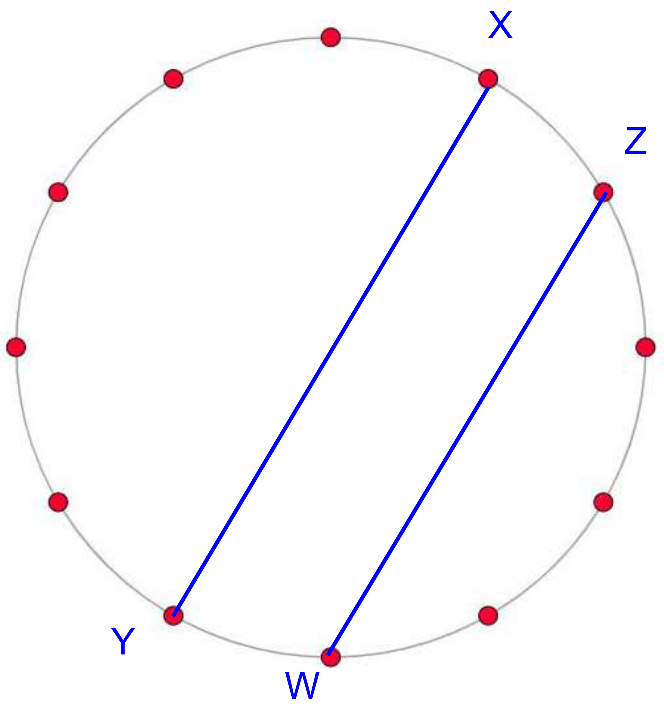
Nous allons voir un autre cas de géométrie spécifique, les parallélismes. Par exemple, les flèches entourées en rouge et en vert  sont parallèles sur la figure ci dessous, dont la fonction est:

$f(x) = 2x + 3\ [12]$



# II.E. Étude des parallélismes

Nous pouvons étudier ces parallélismes. Pour une fonction f(x) = ax+b [n],




Pour avoir des lignes parallèles, il faut que:

f(x) = y [n] et f(z) = w [n]

ou

f(y) = y [x] et f(z) = w [n]

ou

f(x) = y [n] et f(w) = z [n]

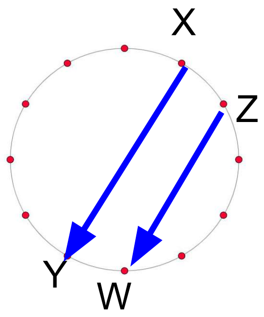
ou

f(y) = y [x] et f(w) = z [n]

# II.E. Étude des parallélismes

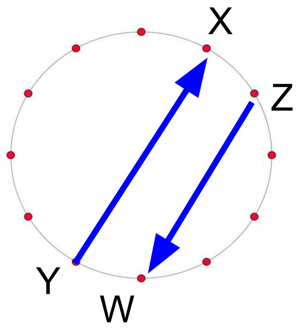
Pour observer des parallélisme, il faut que:

$(a+1)(x-z) = 0$ [n]



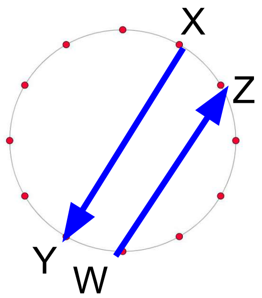

ou

$(a+1)(y-z) = 0$ [n]



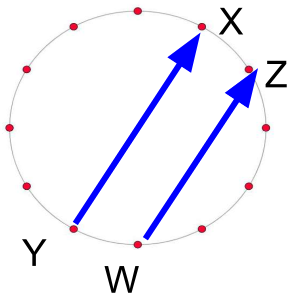

ou

$(a+1)(x-w) = 0$ [n]



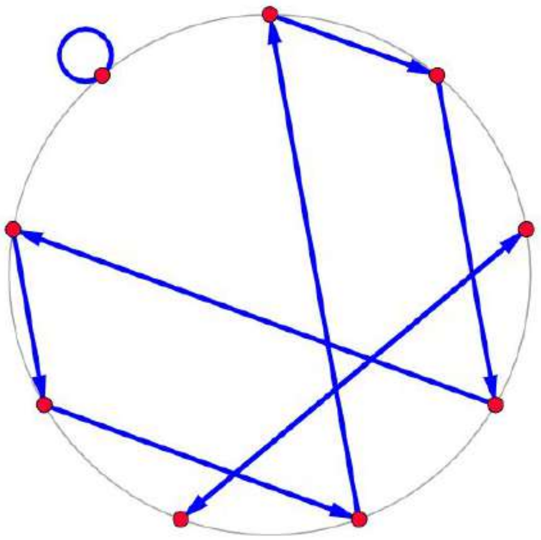

ou

$(a+1)(y-w) = 0$ [n]



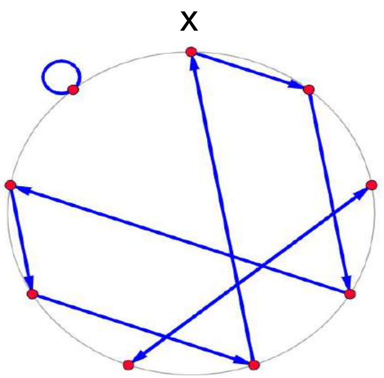
# II.E. Étude des parallélismes

Ces conditions de parallélisme sont nécessaires mais pas suffisantes, il peut aussi y avoir des points fixes au lieu de parallélismes. Prenons un exemple:



Ici, $f(x) = 2x+1\ [9]$

# II.E. Étude des parallélismes

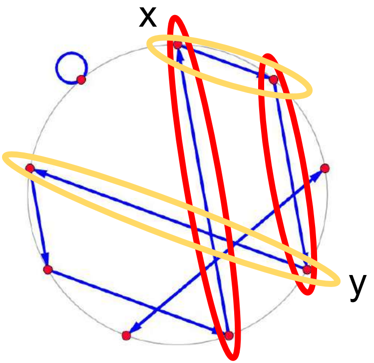



Si on prend x = 0 avec n = 9 , a = 2 , b = 1

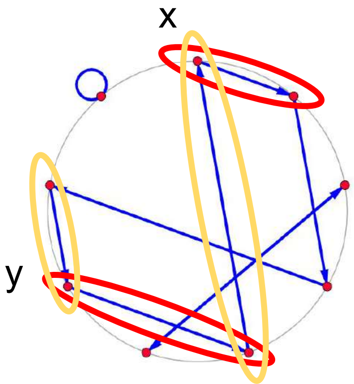
Il y aura probablement un parallélisme avec un autre point y, avec x =/= y, avec donc des flèches qui partent ou qui arrivent en y.

$$(a+1)(x-y) = 0\ [9] \quad (=) \quad -3y = 0\ [9] \quad (=) \quad y = 0\ [3]$$

Par exemple, y = 3




Ou  y = 6




On peut en aussi en déduire que si a+1 est un diviseur de n, il est très probable d’observer des figures de parallélismes dans l’horloge.

# FONCTIONS PUISSANCES

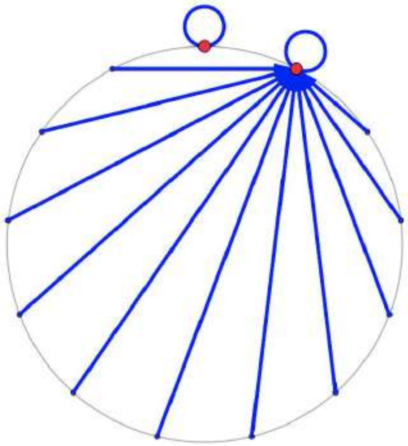
$X \rightarrow A(X^B)$

# III.A. a = 1, fonction de type y = x^b (a = 0 ne sert à rien)

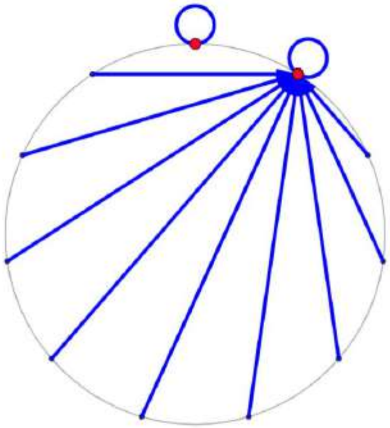
(b = 0 et b = 1 ont déjà été traités)

<u>Cas particulier :</u>

Soit n un nombre premier, et on pose b tel que b = 0 [n-1], on obtient alors un point fixe en 0 et sinon tous les autres points du cercles convergent vers 1. Ceci est une conséquence du petit théorème de Fermat.



Ici n = 13 et b = 12



Ici n = 11 et b = 10

<u>Note :</u>

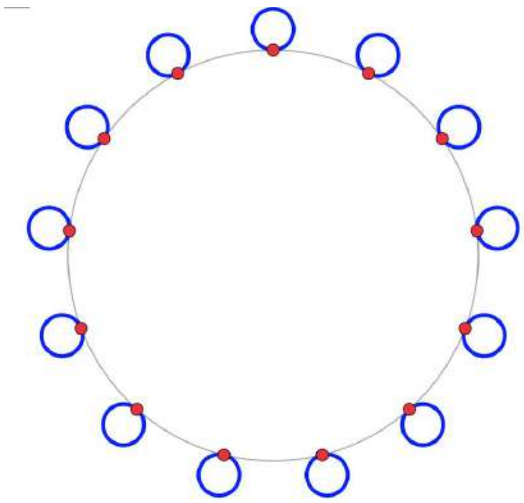
**Théorème de Fermat :**

Soit n un nombre premier et x un entier premier avec avec n. Alors x^(n-1) a pour reste 1 dans la division de x^(n-1) par n.

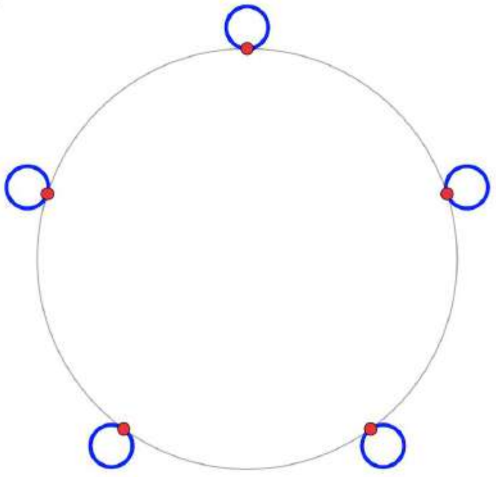
x^(n-1) = 1 [ n ]

# III.A. a = 1, fonction de type y = x^b (a = 0 ne sert à rien)

Si n est premier, lorsque b = 1 [n-1] tous les points sont des points fixes par le même théorème (avec b non nul).



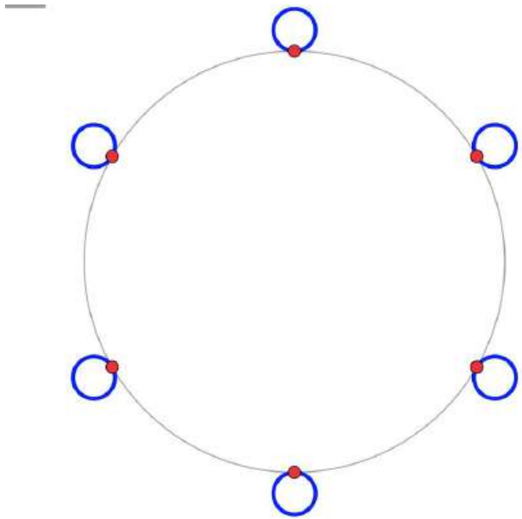
Ici n = 13 et b = 13
On a bien 13 = 1 [12]



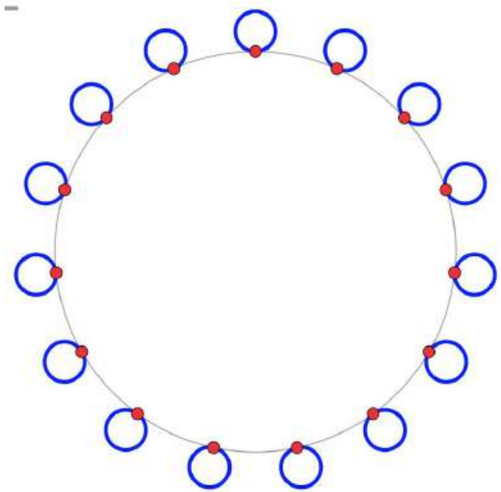
Ici n = 5 et b = 9
On a bien 9 = 1 [8]

# III.A. a = 1, fonction de type y = x^b (a = 0 ne sert à rien)

Si n n’est pas premier ni divisible par un carré parfait, soit p son plus grand diviseur premier. Si b = 1 [p-1] alors tous les points sont des points fixes.



Ici n = 6 p = 3 et b = 11
On a bien 11 = 1 [2]



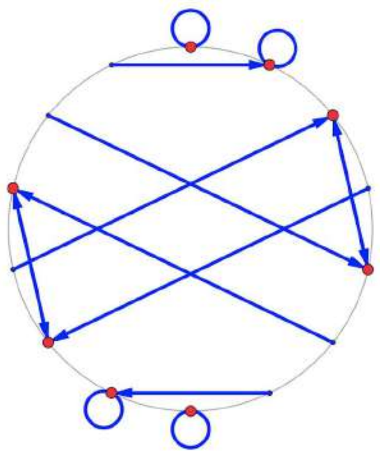
Ici n = 15 p = 5 et b = 13
On a bien 13 = 1 [4]

# III.A. a = 1, fonction de type y = x^b (a = 0 ne sert à rien)

Si b = 2, il y a $2^{\omega(n)}$ points fixes, ou $\omega(n)$ est une fonction qui compte le nombre de facteurs premiers de n distincts. En effet :

$x = x^2 \, [n] \Rightarrow n | x^2 - x \Rightarrow n | x(x-1) \Rightarrow x(x-1) = kn \Rightarrow x(x-1) = k(p_1 * p_2 * \ldots * p_{\omega(n)} * m)$

PGCD(x,x-1) = 1 donc x et x-1 doivent se partager les facteurs de n. Il y a $2^{\omega(n)}$ combinaisons des facteurs de n possibles (limite supérieure sur le nombre de solution)

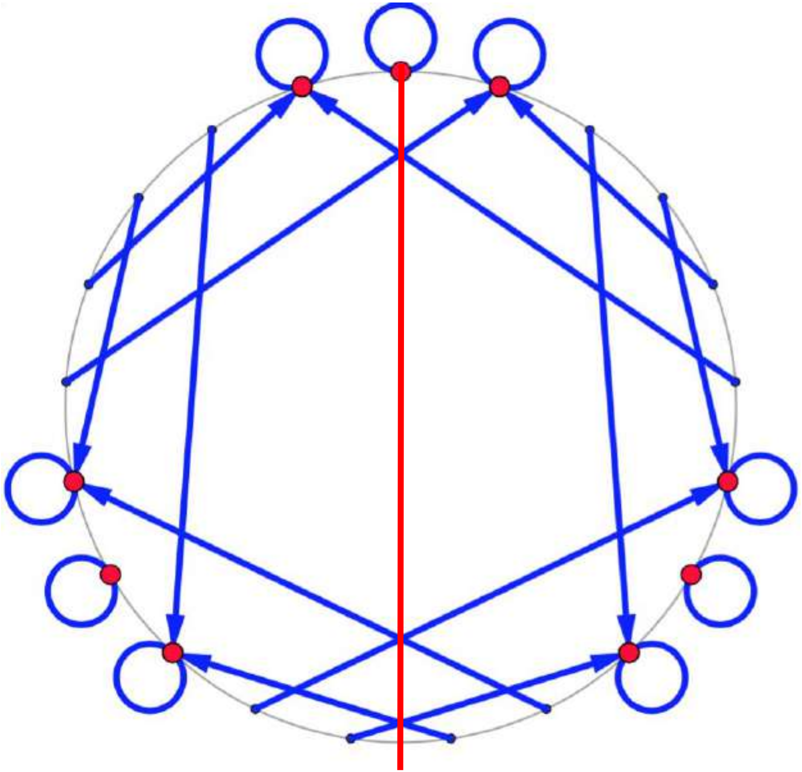


Ici n = 14 et b = 2
$\omega(14) = 2$ car $14 = 7*2$
Donc $2^{\omega(14)} = 4$, ce qui correspond (on a bien 4 points fixes)

# III.A. a = 1, fonction de type y = x^b (a = 0 ne sert à rien)

Si b est impair, b peut s'écrire b = 2q+1 pour un certain q. Alors il n'est pas difficile de prouver qu'une symétrie axiale apparaît. La symétrie se traduit mathématiquement par (-x)^b = -(x)^b. En effet :

(-x)^b = (-x)^(2q+1) = (-x)*(-x)^(2q) = -(x)^b.



Ici n = 21 et b = 9

# III.B. a = 2 et b variant de 1 à l'infini, fonction de type y = 2(x^b)

Si n=1 : on a une figure unique.

Si n=2 : on a une figure unique.

Si n=3 : on a deux figures qui s'enchaînent.

Si n=4 : on a une figure unique.

Si n=5 : on a quatre figures qui s'enchaînent.

Si n=6 : on a deux figures qui s'enchaînent.

Si n=7 : on a six figures qui s'enchaînent.

Si n=8 (sauf pour b=1): on a deux figures qui s'enchaînent.

Si n=9 : on a douze figures qui s'enchaînent.

Si n=10 : on a quatre figures qui s'enchaînent.

Si n=11 : on a dix figures qui s'enchaînent.

Si n=12 : on a deux figures qui s'enchaînent.

Si n=13 : on a douze figures qui s'enchaînent.

Si n=14 : on a six figures qui s'enchaînent.

Si n=15 : on a quatre figures qui s'enchaînent.

Si n=16 (sauf pour b=1): on a deux figures qui s'enchaînent.

# III.B. a = 2 et b variant de 1 à l'infini, fonction de type y = 2(x^b)

EX : Pour n = 12, et b varie de 1 à l'infini : on a juste deux figures (figure A et figure B (similaires)) qui s'enchaînent. (certains traits ne sont pas présents car le calcul est trop gros mais on suppose que les figures sont les mêmes)

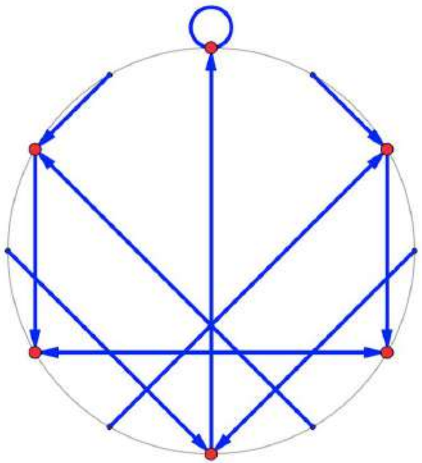


Figure A

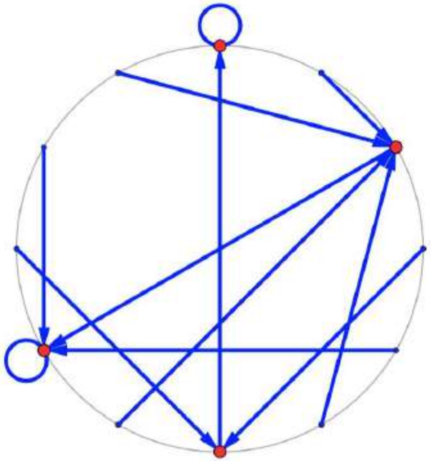
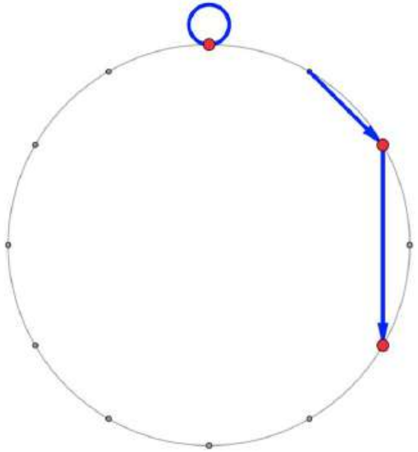


Figure B



Exemple figure A pour b = 33

# III.C. a = 3 et b variant de 1 à l’infini, fonction de type y = 3(x^b)

Si n=1 : on a une figure unique.

Si n=2 : on a une figure unique.

Si n=3 : on a une figure unique.

Si n=4 (sauf pour b=1): on a deux figures qui s'enchaînent.

Si n=5 : on a quatre figures qui s'enchaînent.

Si n=6 : on a une figure unique.

Si n=7 : on a six figures qui s'enchaînent.

Si n=8 (sauf pour b=1 et b=2): on a deux

Si n=9 : on a deux figures qui s'enchaînent.

Si n=10 : on a quatre figures qui s'enchaînent.

Si n=11 : on a dix figures qui s'enchaînent.

Si n=12 (sauf pour b=1) : on a deux figures qui s'enchaînent.

Si n=13 : on a douze figures qui s'enchaînent.

Si n=14 : on a six figures qui s'enchaînent.

Si n=15 : on a quatre figures qui s'enchaînent.

Si n=16 : on a quatre figures qui s'enchaînent.

# III.C. a = 3 et b variant de 1 à l'infini, fonction de type y = 3(x^b)

EX : Pour n = 9, et b varie de 1 à l'infini : on a juste deux figures (figure A et figure B (similaires)) qui s'enchaînent. (certains traits ne sont pas présents car le calcul est trop gros mais on suppose que les figures sont les mêmes)

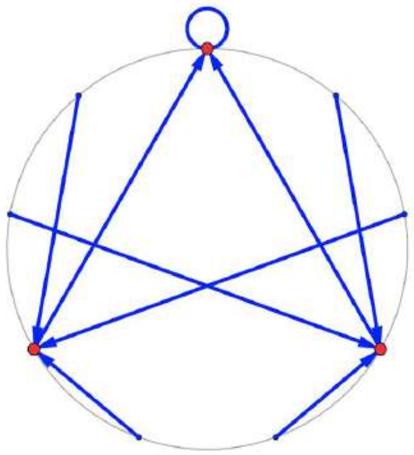


Figure A

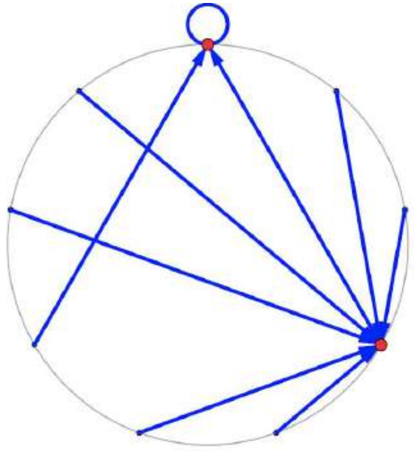
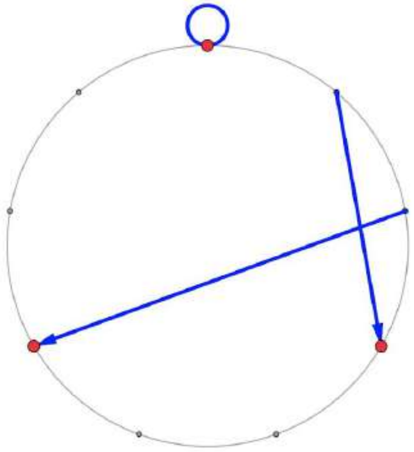


Figure B

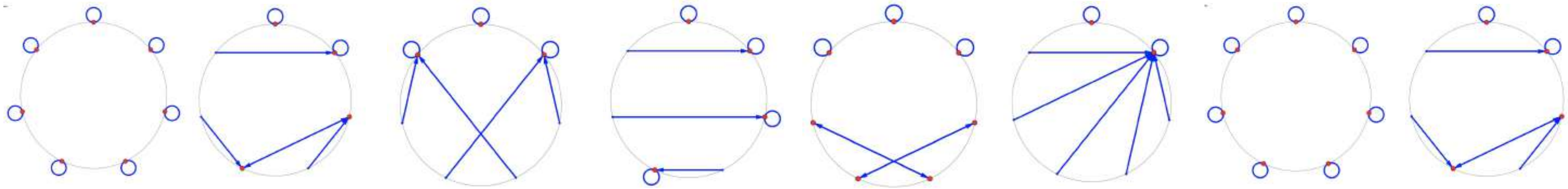


Exemple figure A pour b = 33

# III.D. Les autres cas

Si n est un nombre premier, il y aura un cycle de n-1 figures en variant b de 1 vers l'infini.

EX : Pour n = 7, on a un cycle de 6 figures en variant b de 1 vers l'infini :



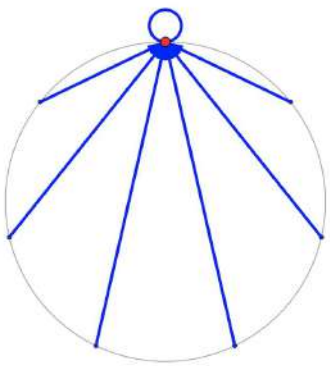
b = 1 b = 2 b = 3 b = 4 b = 5 b = 6 b = 7 b = 8

(même figure que b = 1) (même figure que b = 2)

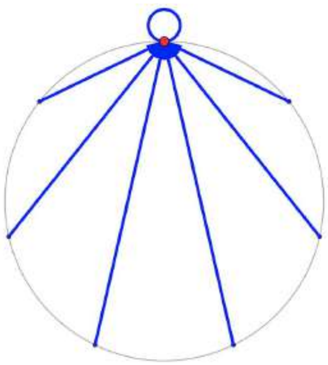
# III.D. Les autres cas

Si n|a il n’y aura qu’une figure quel que soit la valeure de b: toute les flèches iront vers 0.

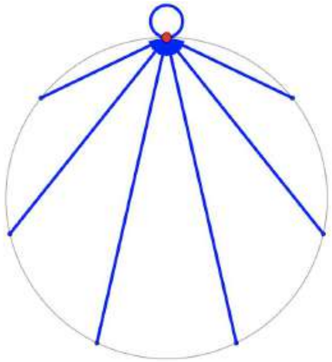
EX : Pour n = 7 et a = 14 :



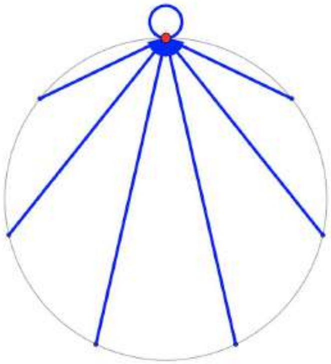
b = 1



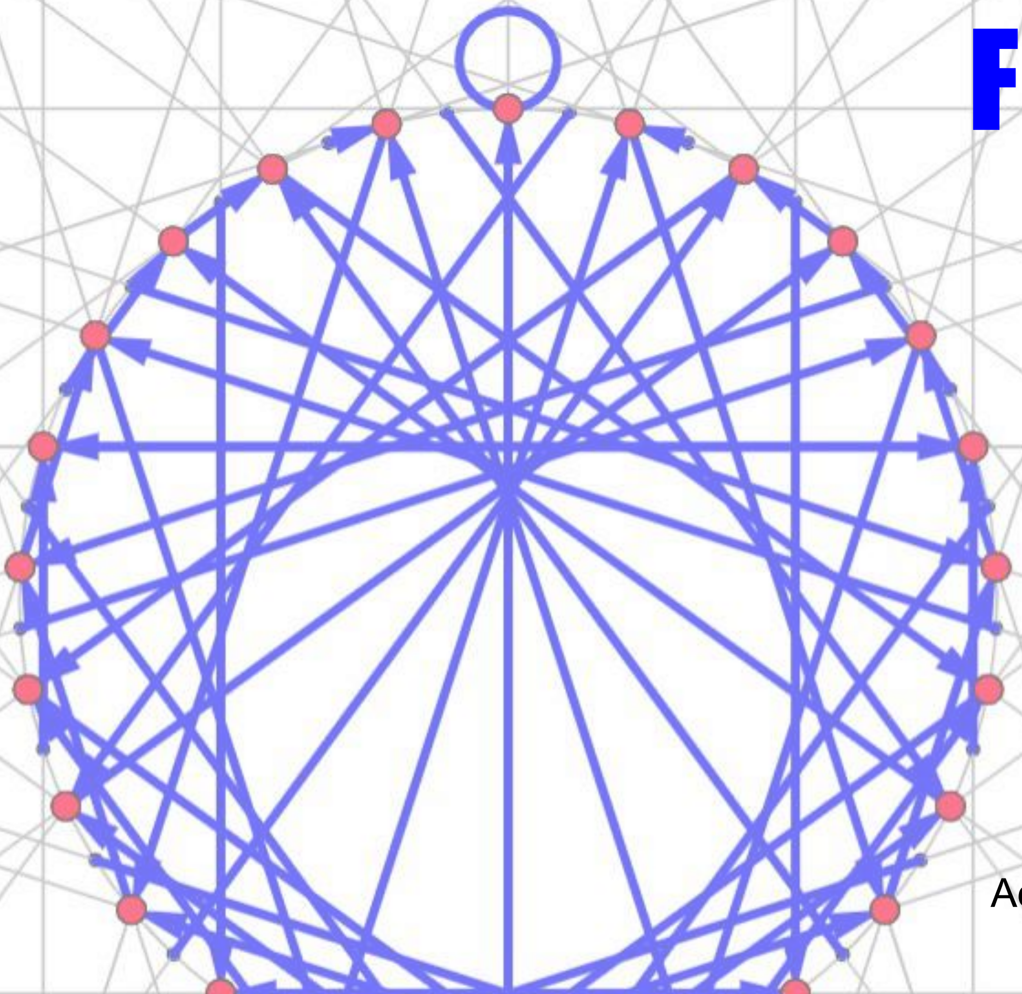
b = 2



b = 3



b = 4



# Fin Présentation Maths En Jean

## Arrow clocks
## Horloges à flèches

Adam Bayle, Mathis Duguin, Anouck Maréchal,
Matéo Pirio Rossignol et Clémie Teston