Les Biftecks

Année 2024 – 2025

Valentin Courtial, Edgar Lemaire, Ayman Michel, élèves de 4ème et 3ème

Établissements : Collège Alain Fournier.

Enseignantes : Florence Ferry.

Chercheur/Chercheuse : Emmanuel Kammerer, École Polytechnique Paris-Saclay.

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Un bifteck doit être cuit deux minutes de chaque côté. Une poêle peut contenir n biftecks.
Combien de temps faut-il au minimum pour cuire k biftecks ?
On pourra commencer par le cas $n = 2$ et $k = 3$.

1.2. Notations

Dans la suite de l'article, nous utiliserons les notations suivantes :

n : nombre de biftecks que peut contenir la poêle.
k : nombre de biftecks que l'on souhaite cuire.
T : temps de cuisson total (en minutes).
t : temps de cuisson par face (en minutes).
f : nombre de faces d'un bifteck.
Les biftecks seront désignés par des lettres A, B, C … avec un indice 1 ou 2 suivant que la face 1 ou 2 est en train de cuire

2. Le cas n=2

- Si $k = 1$, chaque face cuit en 2 minutes et le bifteck est tout seul dans la poêle, donc : $T = 4$ min.
- Si $k = 2$, la poêle est pleine, il faut de nouveau deux fois 2 minutes pour cuire les deux faces, donc : $T = 4$ min.
- A partir de $k = 3$, si l'on cuit d'abord 2 biftecks en 4 minutes et le dernier en 4 minutes, nous

avons T qui vaut 8 minutes et la poêle n'est pas pleine sur les deux dernières étapes de cuisson. Nous avons alors cherché à faire mieux en essayant de remplir la poêle à toutes les étapes de cuisson ; mais dans ce cas, on ne pourrait pas faire mieux.

Voici la méthode trouvée (les disques représentent les poêles avec les biftecks dedans) qui sera notre algorithme pour la suite.

A1 B1	A2 C1	B2 C2

A la deuxième étape de cuisson, on réserve le bifteck B qui est cuit à moitié, on termine la cuisson de A et on commence la cuisson de C. Ainsi, à la dernière étape, on termine les cuissons de B et C. La poêle est toujours pleine. On obtient un temps minimal de 6 minutes.

Lorsque k est pair, on cuit les biftecks entièrement puisque la poêle est toujours pleine mais lorsque k est impair, on cuit les biftecks deux par deux sur les deux faces jusqu'à ce qu'il en reste trois que l'on cuit en suivant l'algorithme.

Voici la schématisation de la cuisson pour $k = 4$ et $k = 5$.

	Étapes de cuisson	T
$k = 4$	A1 B1 — A2 B2 — C1 D1 — C2 D2	8 min
$k = 5$	A1 B1 — A2 B2 — C1 D1 — C2 E1 — D2 E2	10 min

Généralisation :

- Si k est pair, il existe un nombre entier positif a tel que : $k = 2a$. Pour les a groupes de deux biftecks, il faudra 2 minutes de cuisson de chaque côté donc 4 minutes. Donc : $T = 4a = 2k$.
- Si k est impair supérieur ou égal à 3, il existe un nombre entier positif a tel que : $k = 2a + 3$. Pour les a groupes de deux biftecks, il faudra 2 minutes de cuisson de chaque côté donc 4 minutes et pour les trois biftecks restants, il faudra 6 min. Donc : $T = 4a + 6 = 2(2a + 3) = 2k$.

Conclusion : pour faire cuire *k* biftecks dans une poêle ne pouvant en contenir que 2, il faut un temps minimal de 2*k* minutes.

3. Le cas n=3 :

Nous reprenons notre étude cas par cas en commençant par *k* = 1. Pour avoir un temps minimal, nous devons toujours remplir la poêle sauf, peut-être, lors de la dernière cuisson.

4.	Étapes de cuisson ***k***	*T*
1	A1 — A2	4 min
2	A1 B1 — A2 B2	4 min
3	A1 B1 C1 — A2 B2 C2	4 min
4	A1 B1 C1 — A2 B2 D1 — C2 D2	6 min
5	A1 B1 C1 — A2 B2 D1 — C2 D2 E1 — E2	8 min
6	A1 B1 C1 — A2 B2 C2 — D1 E1 F1 — D2 E2 F2	8 min
7	7 = 3 + 4	10 min

8	8 = 3 + 5	12 min
9	Les poêles sont toujours pleines, on cuit les biftecks trois par trois entièrement.	12 min

Dans notre cas, ici, de trois biftecks par poêle, on étudie tous les cas jusqu'à 5 (le double de 3 diminué de 1). Ensuite, on utilise les cas étudiés de $k = 1$ à $k = 5$.

- Si k est un multiple de 3, il existe un nombre entier positif a tel que : $k = 3a$. Pour les a groupes de trois biftecks, il faudra 2 minutes de cuisson de chaque côté donc 4 minutes. Donc : $T = 4a$.

- Si k est un multiple de 3 augmenté de 1, supérieur à 6, il existe un nombre entier positif a tel que : $k = 3a + 1 = 3(a - 1) + 4$. Pour les $(a - 1)$ groupes de trois biftecks, il faudra 4 minutes et pour les quatre biftecks restants, il faudra 6 min. Donc : $T = 4(a - 1) + 6 = 4a + 2$.

- Si k est un multiple de 3 augmenté de 2, supérieur à 6, il existe un nombre entier positif a tel que : $k = 3a + 2 = 3(a - 1) + 5$. Pour les $(a - 1)$ groupes de trois biftecks, il faudra 4 minutes et pour les cinq biftecks restants, il faudra 8 min. Donc : $T = 4(a - 1) + 8 = 4a + 4$.

Voici un exemple : on veut cuire 37 biftecks.

$37 = 3\times 11 + 4$, donc $T = 11\times 4 + 6 = 50$ min.

5. Généralisation pour tout n

La poêle peut contenir au maximum n biftecks et on veut en cuire k.

- Si $k < n$ ou si $k = n$: tous les biftecks tiendront dans la poêle donc il faudra 4 minutes de cuisson en tout. $T = 4$ min.
- Si k est un multiple de n, $k = an$: $T = 4a$ min.
- Si $k > n$ et k n'est pas multiple de n : On trouve le temps minimum de cuisson pour tous les cas de $n + 1$ à $2n - 1$ biftecks. Les cas suivants utiliseront ces résultats. On devra écrire k sous la forme du multiple de n, précédent le plus grand multiple de n inférieur à k, auquel on ajoute l'entier entre $n + 1$ et $2n - 1$. On additionne alors les temps de cuisson avec nos résultats précédents.

Application pour $n = 5$.

- Si $k < 5$ ou si $k = 5$: tous les biftecks tiendront dans la poêle donc il faudra 4 minutes de cuisson en tout. $T = 4$ min.
- On étudie ensuite tous les cas de $k = 6$ à $k = 9$. Voici les résultats obtenus en utilisant toujours notre algorithme.

k	T
6	6 min
7	6 min
8	8 min
9	8 min

- Si k est un multiple de n, $k = an$: $T = 4a$ min. Sinon, T est calculé comme donné dans le tableau suivant ($k > 10$).

k	T
$k = an + 6$	$4a + 6$
$k = an + 7$	$4a + 6$
$k = an + 8$	$4a + 8$
$k = an + 9$	$4a + 8$

Pour cuire par exemple 52 biftecks : $52 = 45 + 7 = 5\times9 + 7$.
Donc : $T = 9\times4 + 6 = 42$ min.

6. Recherche d'une formule

Notre méthode peut être longue car elle nécessite de trouver T pour les $2n - 1$ premiers cas. Nous avons conjecturé une formule qui semble convenir lorsqu'on calcule avec plusieurs exemples et qui nous donne immédiatement le résultat, mais nous n'avons pas réussi à la démontrer. Voici notre formule : $T = \frac{kft}{n}$.
Si le résultat n'est pas entier, on prend la valeur approchée au nombre pair supérieur.

Prenons un exemple : on veut cuire 52 biftecks à deux faces avec une contenance de poêle de 5. $T = \frac{52\times2\times2}{5} = 41{,}6$. On prendra donc $T = 42$ min.

C'est bien le résultat qu'on a trouvé dans la partie 5. précédente.