

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Modélisation de propagation d'une contamination

Année 2024 – 2025

Lisia Timellini, Kloé Banlin-Migliore, Enzo Fasola, Rémi Schoenenberger, Swann Dubus, Adrien Julien, élèves de classe 2nd, 1ere et terminale

Établissement(s) : Lycée Raynouard (Brignoles - Var),

Enseignant-e(s) : Mourau Nelly, Berger Antoine, Guicheteau Denis

Chercheur-Chercheuse(s) : Thierry Champion laboratoire imath. Frédéric Havet - INRIA

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Soient x et y deux nombres entiers strictement positifs.

On considère une grille rectangulaire $x \times y$. On a certaines cases qui sont infectées. Si une case a deux de ses voisines (en haut, en bas, à droite et à gauche) qui sont infectées alors, le jour d'après, elle est infectée à son tour.

On cherche à savoir combien de cases, au minimum, il nous faut pour infecter toute une grille.

1.2. Résultats

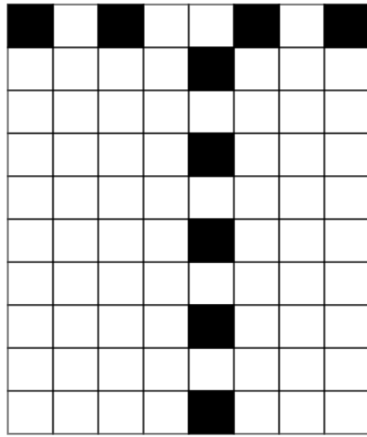
- ❖ Formule pour calculer le nombre minimum de carreaux coloriés :

$$C = \frac{(x+y)}{2} \text{ (arrondi à l'excès)}$$

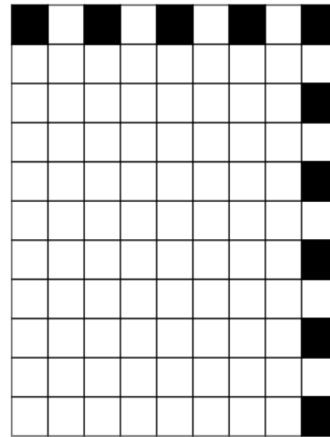
- ❖ Si la diagonale d'un carré est infectée, alors tout le carré sera infecté.
- ❖ Le nombre minimum au début pour infecter n'importe quelle grille rectangulaire ayant les bords déjà infectés et dont la distance entre les deux bords infectés est n est $n/2$ arrondi à l'entier inférieur.

2. Recherches

On cherche le nombre minimum de carreaux infectés à disposer dans le carré ou le rectangle pour avoir la figure contaminée entièrement à la fin et au bout d'un certain temps. On ne s'intéresse qu'au nombre minimum de carreaux à colorier et pas au temps. Tous nos tests sont faits à la main.



x impair, y pair



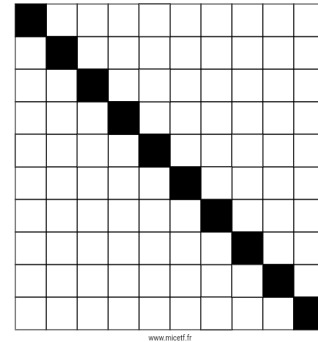
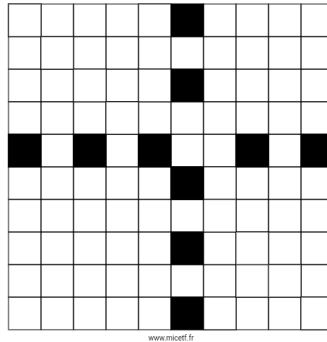
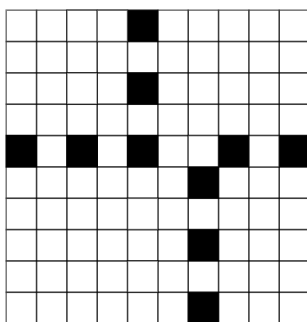
x impair, y impair

2.1. Pour un carré

On a cherché le nombre minimum de carreaux à colorier pour contaminer tout le carré. On a fait différents tests pour savoir quel serait ce nombre. On a trouvé les configurations ci-dessous.

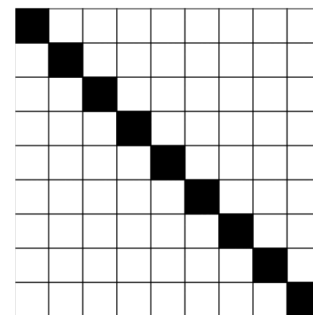
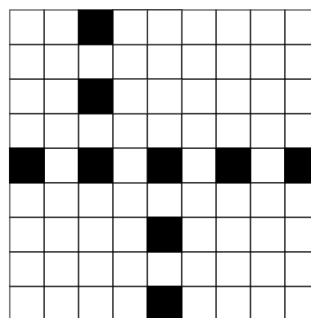
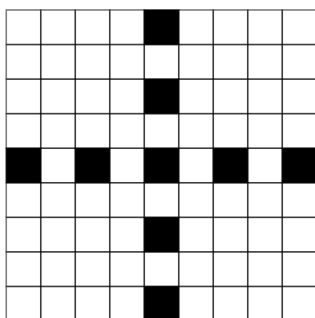
2.1.1. Côté pair

Pour un carré ayant ses côtés pairs, la disposition du nombre minimum de carreaux à colorier se fait comme ci-dessous, où on voit un exemple pour un carré de côté 10.



2.1.2. Côté impair

Pour un carré ayant ses côtés impairs, la disposition du nombre minimum de carreaux à colorier se fait comme ci-dessous, où on voit un exemple pour un carré de côté 9.



2.1.3. Pour tous les carrés en général

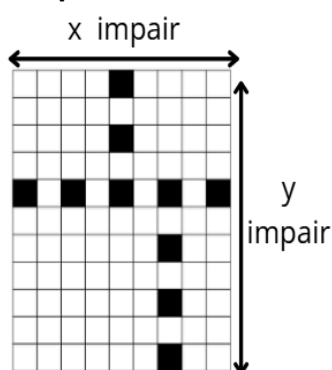
On remarque que les premières dispositions trouvées possèdent des différences selon la parité (s'il est pair ou impair) du côté. Cependant pour la disposition où c'est la diagonale, on ne voit pas de changement donc c'est le schéma le plus simple que nous avons décidé de garder pour positionner les carreaux dans n'importe quel carré.

De plus, on conjecture la formule pour calculer le nombre minimum de carreaux à colorier pour contaminer tout un carré, qui est $C = x$ avec C le nombre minimum de carreaux à colorier et x le nombre de cases d'un côté du carré.

2.2. Pour un rectangle

On a ensuite cherché pour un rectangle quel serait le nombre minimum de carreaux à colorier pour le contaminer entièrement. On distingue trois types de rectangles : ceux aux deux côtés impairs, ceux avec un côté pair et un impair et ceux avec deux côtés pairs. On nomme x la largeur et y la longueur.

2.2.1. Rectangle aux deux côtés impairs



On remarque que si on prend la longueur et la largeur des côtés et qu'on les ajoute puis qu'on les divise par 2 on trouve le même nombre de carreaux à colorier que sur le schéma.

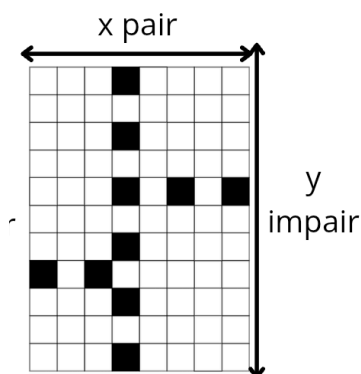
Par exemple avec 11 et 9 :

$$C = \frac{(11+9)}{2} = 10.$$

On peut compter 10 carreaux sur le schéma.

On conjecture la formule: $C = \frac{(x+y)}{2}$

2.2.2. Rectangle avec un côté pair et un impair



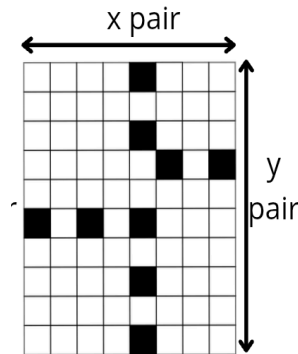
On a ci-dessus un rectangle avec $x = 8$ et $y = 11$.

On utilise la même technique que pour deux côtés impairs mais on trouve 9,5. On ne peut pas avoir de demi carreau donc on arrondit d'abord à 9 mais on trouve que cela ne fonctionne pas sur notre

schéma donc on arrondit à l'excès (on trouve 10) et on peut retrouver le même nombre de carreaux que sur notre schéma.

On peut donc conjecturer $C = \frac{(x+y)}{2}$ arrondi à l'excès.

2.2.3 Rectangle avec deux côtés pairs



On a $x = 8$ et $y = 10$.

On réutilise la formule ($C = \frac{(x+y)}{2}$) pour voir si elle peut s'appliquer à ce cas et en effet on trouve le même résultat $C = \frac{(8+10)}{2} = 9$, on peut compter 9 carreaux sur la grille donc on peut conjecturer $C = \frac{(x+y)}{2}$ sans arrondi.

2.3. Formule générale

On a ainsi conjecturé une formule qui fonctionne à la fois pour les carrés et pour tous les types de rectangles, qui est $C = \frac{(x+y)}{2}$ et arrondi à l'excès.

3. Nouvelles règles

3.1. Explications

Un autre groupe a travaillé en changeant les règles de contamination.

Voici les nouvelles règles de la contamination :

- Notre contamination commence avec 2 cases contaminées dans un angle en bas à gauche de notre grille.
- On autorise la contamination à s'effectuer en diagonales.

Le chiffre présent dans notre grille correspond au temps qu'il faudra pour contaminer la case.

4	4	5	6
3	3	4	5
2	2	3	4
1	1	2	3
0	0	2	3

Exemple pour contaminer un rectangle de longueur $x = 5$ et de largeur 4 :

$$\text{Temps pour contaminer la grille : } x + y - 3 = 5 + 4 - 3 = 6$$

4	4	5	6	7
3	3	4	5	6
2	2	3	4	5
1	1	2	3	4
0	0	2	3	4

Exemple pour un carré de côté $n = 5$:

$$\text{Temps pour contaminer la grille : } 2 \times n - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$$

Ce résultat est cohérent avec le précédent car ici $x = y = n$

3.2. Démonstration illustrée

Démonstration $d-2$

.....→

	$n-1$	$n-1$	n	$n+1$...	$n+d-5$	$n+d-4$	$n+d-3$	$n-1+d-2$
	
n	3	3	$d+1$	
	2	2	3	d	
	1	1	2	3	$d-1$	
	0	0	2	3	$d-1$	
					d				

Nous avons noté n et d les côtés du rectangle, puis nous avons regardé le temps mis dans chaque ligne pour arriver au résultat final en haut à droite.



4. Le théorème de la diagonale infectée

4.1. Théorème

Ce théorème dit que lorsque l'on a un carré dont la diagonale est infectée, alors tout le carré sera infecté au bout d'un certain temps.

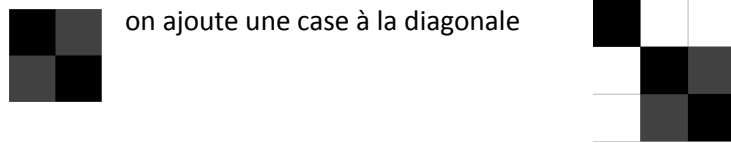
4.2. Démonstration

Soit n la taille de la diagonale avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : pour $n = 2$, on a :  ce qui donne  après application des règles de contamination.

Hérédité : Supposons un entier $n > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le carré soit entièrement infecté, et montrons que le carré est entièrement infecté pour $n+1$.

Hypothèse : le carré de taille n est entièrement infecté



Puis on applique les règles d'infections n fois jusqu'à infection complète de la grille :

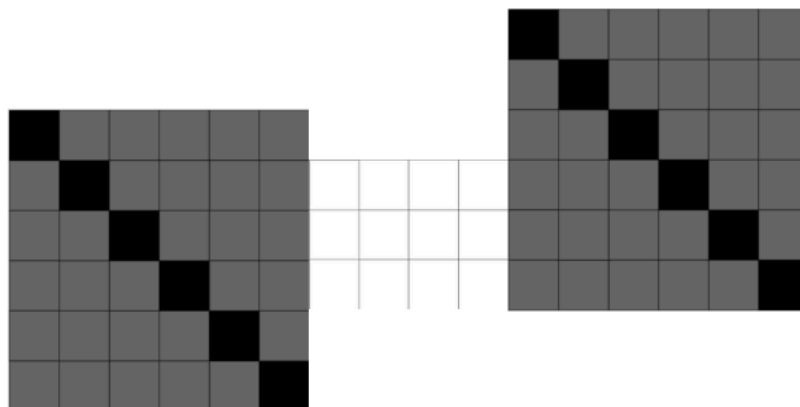


On obtient une grille entièrement infectée ce qui prouve l'hérédité.

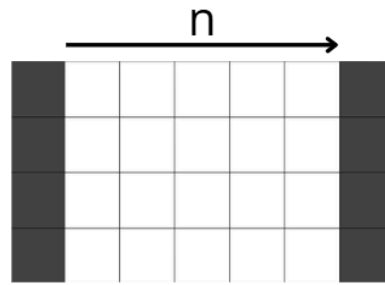
Conclusion : Pour toutes grilles de diagonale principale n dont cette diagonale est infectée, au bout d'un certain temps, toute la grille sera infectée.

5. La grille à bords infectés

Cette configuration est possible si une forme se trouve entre deux autres formes qui seront infectées entièrement au bout d'un certain nombre de tours. On appellera ces configurations des couloirs. En effet cela peut être utile dans des formes plus complexes comme ci dessous:



5.1. Prédiction du nombre de cases à infecter au minimum pour infecter n'importe quelle grille ayant les bords déjà infectés :



Nous avons conjecturé après de nombreux tests une formule pour prédire le nombre de cases à infecter au minimum au début pour infecter ce couloir qui est : $\frac{n}{2}$ arrondi à l'entier inférieur. Il suffit de prendre la première ligne par exemple et de colorier une case sur deux jusqu'à l'autre bord. Nous allons prouver notre conjecture grâce aux prochains théorèmes.


5.2. Le théorème des côtés infectés appliqué au carré



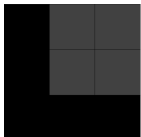
5.2.1. Théorème

Dans une grille carrée dont deux bords adjacents sont infectés, au bout de n générations, la grille complète sera infectée, où n est le nombre de cases d'un côté du carré.

5.2.2. Démonstration

Soit n la taille du carré sans les bords infectés avec $n \in \mathbb{N}^*$.

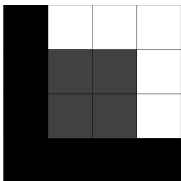
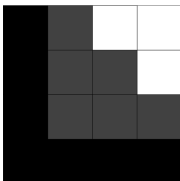
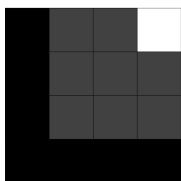
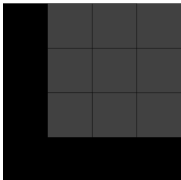
Initialisation : pour $n=2$, on a donc :  puis on applique les règles de contamination :

 puis  et enfin  donc la grille est bien infectée.

Hérédité : Supposons un entier $n > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le carré soit entièrement infecté, et montrons que le carré est entièrement infecté pour $n+1$.

Hypothèse : le carré de taille n est entièrement infecté :

Prenons un carré de taille $n+1$ dont les bords sont infectés, il est constitué d'un carré de taille n avec des bords infectés et d'une bordure, on a donc :

 Puis on applique les règles d'infection :  puis 
et enfin  . La grille est entièrement infectée ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion : Pour toutes grilles carrés de taille $n > 0$ dont deux bords sont infectés, toute la grille sera infectée au bout d'un certain temps.

5.3. Le théorème des côtés infectés généralisé aux rectangles

5.3.1. Théorème

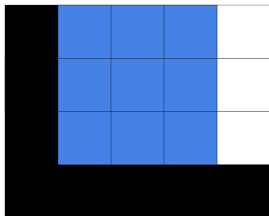
Dans une grille rectangulaire dont deux bords adjacents sont infectés, au bout de N générations, la grille complète sera infectée.

5.3.2. Démonstration

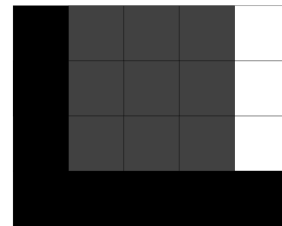
Soit L la largeur et l la longueur du rectangle avec $l > L$.

On prend le plus grand carré possible inscrit dans le rectangle soit un carré de taille $L-1$. (en prenant en compte la bordure)

Exemple :



On applique donc le théorème des côtés infectés appliqué au carré pour obtenir une grille de la forme :



On peut ensuite découper à nouveau le rectangle obtenu pour avoir un nouveau rectangle de la forme :

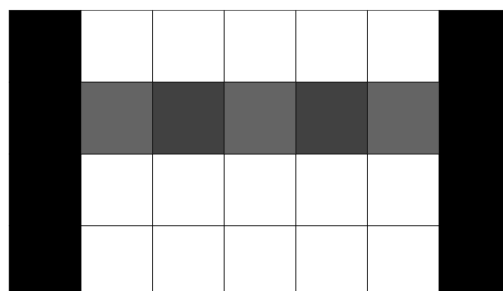


On découpe à nouveau ce rectangle en carrés.

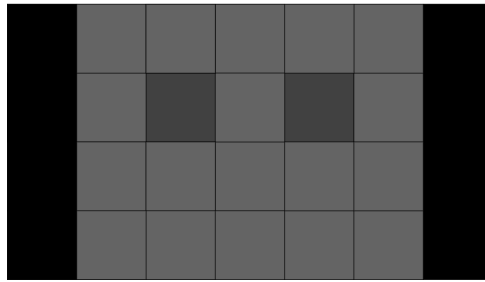
On répète l'opération jusqu'à contamination complète de la grille. Cela fonctionne car la taille des carrés est décroissante donc atteindra 0 à un moment donné.

5.4. Application de ce théorème aux couloirs

Dans la configuration du couloir à bords infectés, une case sur deux est infectée. Après une génération, toute la ligne est infectée.



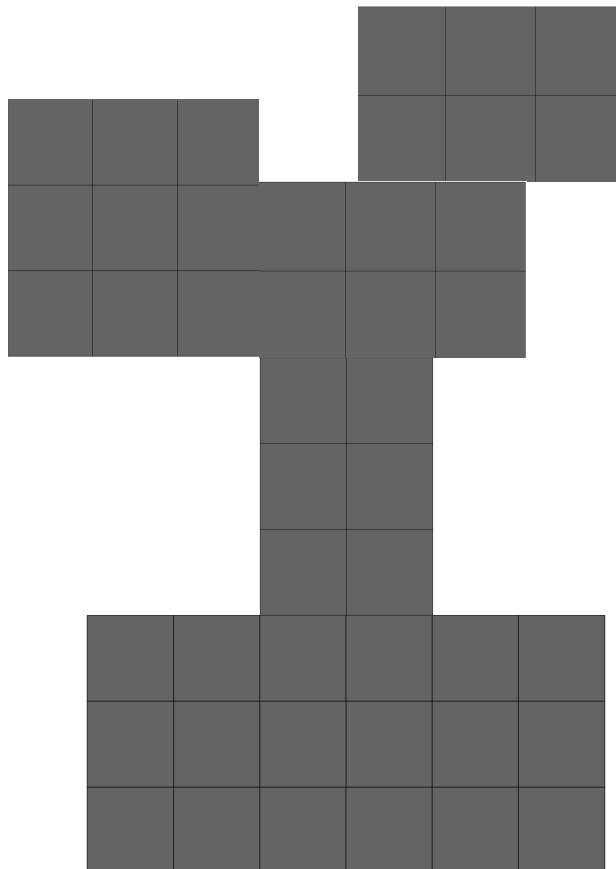
On remarque alors une double configuration du théorème des côtés infectés, une en haut et une en bas. En appliquant le théorème, tout le couloir sera infecté. On obtient donc :



Conclusion: Le nombre de cases à infecter au minimum pour infecter n'importe quelle grille ayant les bords déjà infectés : $\frac{n}{2}$ arrondi à l'entier inférieur.

6. Ouvertures

La suite que nous aurions aimé apporter à ce sujet aurait été la contamination de grilles plus complexes. On entend par ici des grilles composées de plusieurs rectangles mis bout à bout comme celui ci-dessous :



Nous avons déjà commencé à nous pencher sur la question et nous avons divisé le processus en 3 étapes. Tout d'abord le découpage, il s'agit de la division de la grille en forme que nous savons

traiter comme des carrés. Ensuite, le remplissage de la grille, et enfin l'optimisation dans laquelle on ajuste le remplissage en fonction de l'éventuel redondance de certaines cases ou bien en fonction du contexte. De cette façon, nous avons obtenu de bons résultats mais n'avons pas la certitude qu'il s'agisse de la meilleure manière de traiter ces grilles dû à la diversité de celles-ci et au peu de temps que nous avons consacré à cette problématique.

Nous avons aussi vu qu'il fallait utiliser $\frac{x+y}{2}$ cases contaminées dans le cas d'un rectangle, mais nous n'avons pas démontré qu'il s'agissait de la plus petite valeur possible. C'est encore une conjecture que nous voudrions démontrer.