

Croissance d'un cristal

Année 2023 – 2024

Élèves de 4^{ème} : Colbeau-Justin Alexis, Helmstetter Jonas , Josse Victor et Roche Emilien.

Établissement : Collège Alain-Fournier à Orsay (91).

Enseignante : Florence FERRY.

Chercheur : Emmanuel KAMMERER, Ecole polytechnique Paris-Saclay.

Le sujet : - On considère un rectangle dont les quatre côtés s'éloignent du centre avec des vitesses v_1, v_2, v_3 et v_4 . Comment évolue l'aire du rectangle ?

- Et si on considère un polygone dont les côtés s'éloignent à des vitesses constantes mais différentes : que se passe-t-il pour un parallélogramme ? pour un triangle ? pour un polygone régulier ? Est-ce que le nombre de côtés change ?

- On change de dimension : un cristal est défini comme étant un polyèdre dont les faces se déplacent vers l'extérieur à des vitesses constantes mais différentes. Comment évolue le volume du cristal ? (pour un parallélépipède rectangle ? pour un tétraèdre régulier ? ...)

Les résultats : Nous avons pu démontrer pour des figures particulières que le nombre de côtés ne changeait pas. En considérant des données de départ très précises, nous avons démontré pour ces figures qu'à une étape, les dimensions avaient été multipliées par un nombre strictement positif k et les aires par k^2 . Pour les polyèdres, nous avons juste émis une conjecture sur les volumes obtenus.

I – Le rectangle

1) Première recherches

Exemple 1 : On se donne un rectangle de départ de dimensions 2 cm sur 4 cm et de centre O.

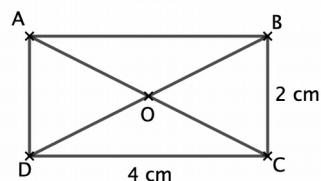


fig 1

Chaque côté s'éloigne de O avec des vitesses (en cm/s)

:

$$v_1 = 1 ; v_2 = 2 ; v_3 = 3 ; v_4 = 4.$$

Au bout d'une seconde, les côtés [AB], [BC], [CD] et [AD] se sont respectivement déplacés de 1, 2, 3 et 4 centimètres.

Au bout de deux secondes, les côtés se déplacent à nouveau dans les mêmes directions et ainsi de suite.

A chaque étape, les côtés de la figure obtenue sont parallèles aux côtés de la figure à l'étape précédente, les angles droits sont donc conservés et les figures obtenues sont encore des rectangles et donc le nombre de côtés reste inchangé.

Au bout d'une seconde, on obtient un rectangle de dimensions 6 cm sur 10 cm, au bout de deux secondes, un rectangle de dimensions 10 cm sur 16 cm etc.

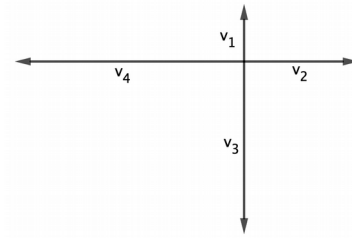


fig 2

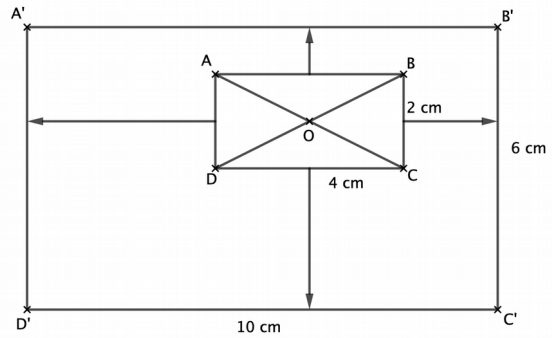


fig 3

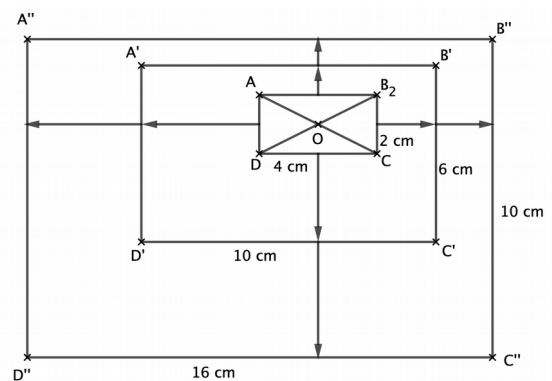


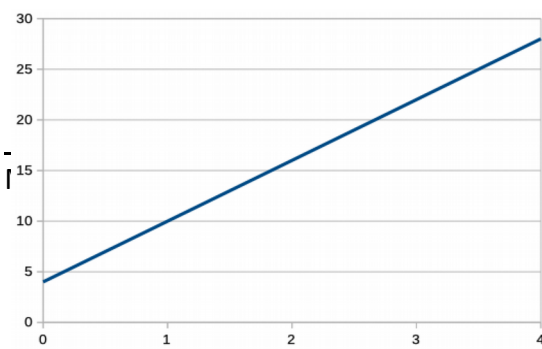
fig 4

Recherchons maintenant comment évoluent les longueurs et les aires suivant l'étape. Y a-t-il proportionnalité ?

Voici nos données regroupées dans un tableau (nous avons regardé l'évolution des longueurs du rectangle) .

| Etapes : nombre de secondes | Départ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------------------|--------|----|-----|-----|-----|
| Longueur (cm) | 4 | 10 | 16 | 22 | 28 |
| Aire (cm ²) | 8 | 60 | 160 | 308 | 504 |

La longueur augmente de 6 cm (somme venant des deux vitesses v_2 et v_4) et de même la largeur augmente de 4 cm (somme venant des deux vitesses v_1 et v_3) ; mais aucun lien de proportionnalité ne se dégage.



En réalisant un graphique illustrant ces données on obtient une droite mais ne passant pas par l'origine.

En abscisse : l'étape ; en ordonnée : la longueur du rectangle.

Nous avons donc eu l'idée de changer notre point de départ.

2) Démarrage d'un point

Nous décidons dans la suite de l'article que la figure de départ est réduite à un point.

Puis nous recommençons nos recherches avec les mêmes vitesses qu'au 1).

Voici les figures obtenues au bout d'une seconde puis deux et enfin le tableau de valeurs. Les remarques précédentes sur le nombre de côtés et la forme de la figure à chaque étape restent inchangées.

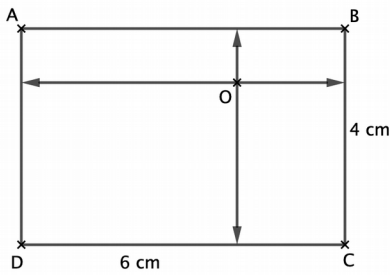


fig 5

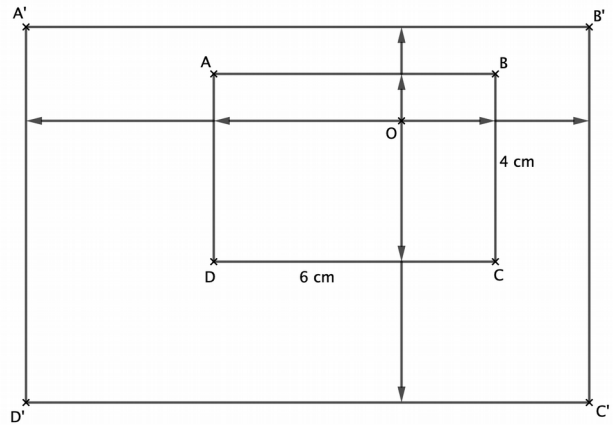


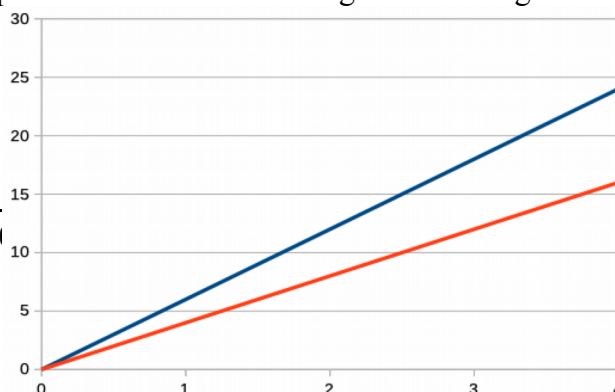
fig 6

| Etape n, nombre de secondes | Départ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------------------------|--------|----|----|-----|-----|
| Longueur (cm) : L_n | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 |
| Largeur (cm) : l_n | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 |
| Aire (cm ²) : A_n | 0 | 24 | 96 | 216 | 384 |

Il semble qu'il y ait proportionnalité entre l'étape n et la longueur ainsi qu'entre n et la largeur.

On a : $L_n = 6n$ et $l_n = 4n$.

Voici le graphique correspondant au calcul de la longueur et la largeur en fonction de l'étape (1) :



Pour l'aire, pas de proportionnalité ; en effet : $\frac{24}{1}=24$ et $\frac{96}{2}=48$.

Mais on a : $\frac{96}{24}=4=2^2$; $\frac{384}{96}=4=2^2$ et $\frac{216}{24}=9=3^2$

D'autres exemples avec des vitesses différentes nous ont amené à des résultats identiques et nous avons pu faire deux conjectures.

Propriété 1 : Lorsqu'on multiplie le temps par un nombre strictement positif k , le périmètre du rectangle est multiplié par k .

Propriété 2 : Lorsqu'on multiplie le temps par un nombre strictement positif k , l'aire du rectangle est multiplié par k^2 .

Démonstrations

Prenons les vitesses en cm/s : x, y, z et t . Au bout d'une seconde, le rectangle a pour dimensions $x + z$ sur $y + t$.

Son périmètre : $P_1 = 2(x + z) + 2(y + t) = 2x + 2z + 2y + 2t$.

Son aire : $A_1 = (x + z)(y + t) = xy + xt + yz + zt$.

Soit k , un nombre strictement positif. Au bout de k secondes, un premier côté s'est déplacé de kx , un deuxième (adjacent) de ky , puis un troisième de kz et enfin le dernier de kt .

Le périmètre du rectangle à cette étape k est donc :

$P_k = 2(kx + kz) + 2(ky + kt) = 2kx + 2kz + 2ky + 2kt = k(2x + 2z + 2y + 2t) = kP_1$.

L'aire : $A_k = (kx + kz)(ky + kt) = k^2 xy + k^2 xt + k^2 yz + k^2 zt = k^2(xy + xt + yz + zt) = k^2 A_1$.

II – Le parallélogramme

- Etude d'un exemple

Reprenons un parallélogramme de dimensions nulles au départ et dont les côtés se déplacent à des vitesses en cm/s $v_1 = 1$; $v_2 = 2$; $v_3 = 3$; $v_4 = 4$.

Voici l'évolution au bout de deux secondes :

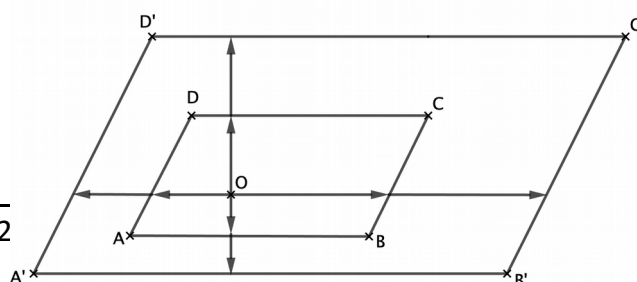
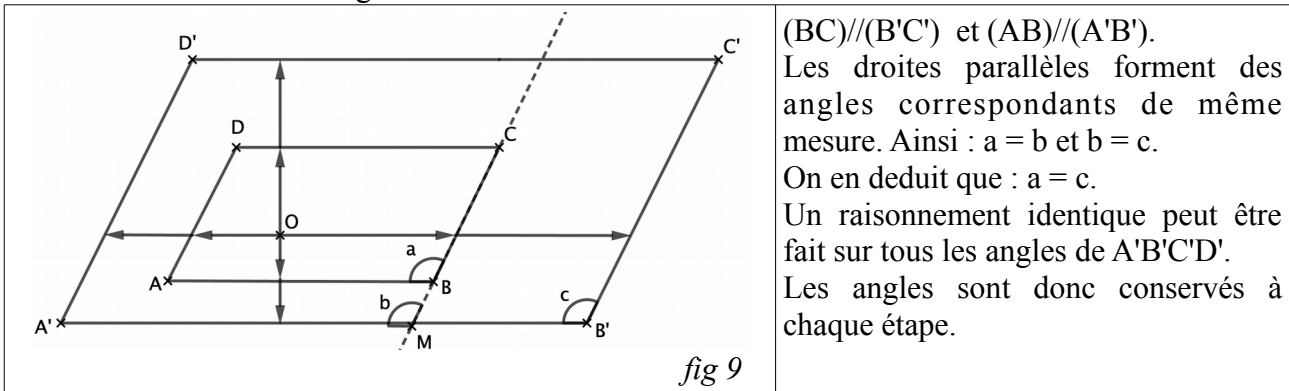


fig 8

Les côtés s'éloignent dans la même direction, ils restent donc toujours parallèles aux précédents donc les figures à chaque étape gardent le même nombre de côtés, ce sont des parallélogrammes. Y a-t-il conservation des angles ?



(BC)//(B'C') et (AB)//(A'B').
 Les droites parallèles forment des angles correspondants de même mesure. Ainsi : $a = b$ et $b = c$.
 On en déduit que : $a = c$.
 Un raisonnement identique peut être fait sur tous les angles de A'B'C'D'.
 Les angles sont donc conservés à chaque étape.

Pour le périmètre :

Propriété : lorsqu'on multiplie le temps par un nombre strictement positif k , le périmètre du parallélogramme est multiplié par k .

Les parallélogrammes obtenus sont donc des agrandissements des parallélogrammes des étapes précédentes et la démonstration est identique à celle du rectangle.

L'aire du parallélogramme au bout de une seconde avec les vitesses en cm/s : x, y, z et t est le produit de AB par la distance séparant [AB] et [CD] : $A_1 = (x + z)(y + t) = xy + xt + yz + zt$.

Soit k , un nombre strictement positif. Au bout de k secondes, un premier côté s'est déplacé de kx , un deuxième (adjacent) de ky , puis un troisième de kz et enfin le dernier de kt . Avec un raisonnement identique au rectangle on a : $A_k = k^2 A_1$.

Propriété : lorsqu'on multiplie le temps par un nombre strictement positif k , l'aire du parallélogramme est multipliée par k^2 .

III – Le triangle

Nous avons besoin de deux prérequis.

Définition : deux triangles ayant leurs angles deux à deux de même mesure sont appelés triangles semblables.

Propriété : Si deux triangles sont semblables alors les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

Le triangle est au départ réduit à un point et nous prenons un exemple en fixant les angles qui vont déterminer les directions dans lesquelles vont se déplacer les côtés.

Ici nous choisissons des angles de $80^\circ, 40^\circ$ et 60° ; les côtés se déplacent avec des vitesses en cm/s de x, y et z .

Voici les figures obtenues au bout d'une et deux secondes :

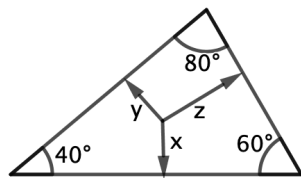


fig 10

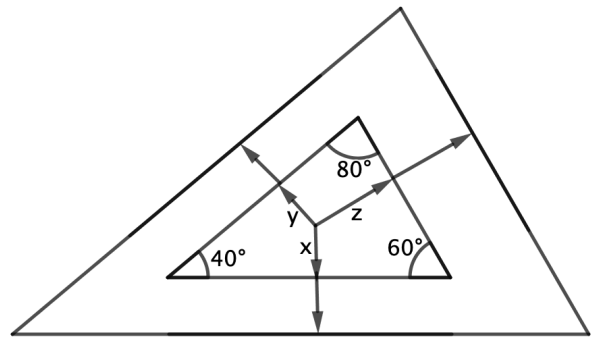
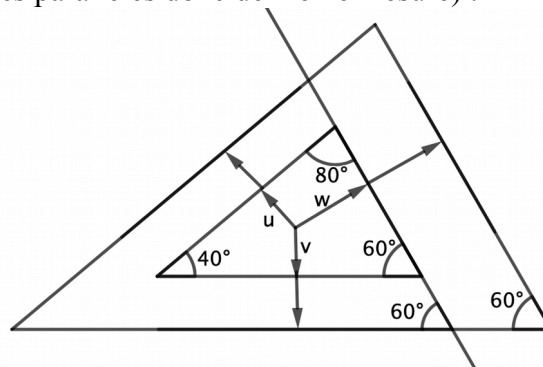


fig 11

Les côtés se déplaçant à chaque étape dans la même direction, ils restent parallèles et la figure obtenue conserve le même nombre de côtés ; ce sont des triangles.

De la même façon que pour le parallélogramme ou le rectangle, les angles sont conservés (angles correspondants formés par des parallèles donc de même mesure) :



A chaque étape on obtient donc des triangles semblables au triangle de l'étape 1, les longueurs des côtés homologues sont donc proportionnelles. Appelons k ce rapport d'agrandissement.

L'aire est-elle encore multipliée par k^2 ?

Soit b l'un des côtés du triangle de l'étape 1 et h sa hauteur relative.

L'aire du triangle à l'étape 1 est : $A_1 = \frac{b \times h}{2}$; à l'étape k , b et h ont été multipliées par k

(agrandissement de rapport k) donc l'aire du triangle est alors : $\frac{kb \times kh}{2} = \frac{k^2 \times b \times h}{2} = k^2 \times A_1$.

pour les triangles, nous avons donc des propriétés identiques à celles énoncées pour les périmètres et aires du rectangle et du parallélogramme.

IV – Extension du sujet

Pour d'autres polygones, nous conjecturons que le nombre de côtés ne varie pas, la figure à chaque étape est un agrandissement de la figure à l'étape 1 ; si on appelle k le rapport d'agrandissement, l'aire est multipliée par k^2 .

Pour les polyèdres, après quelques exemples nous conjecturons que le volume est multiplié par k^3 .

Note d'édition

(1) La longueur correspond à la ligne bleue, la largeur à la ligne rouge