

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Des carrés dans des carrés

Audrey NGUYEN 5^e, Max NGUYEN 6^e et Vincent NGUYEN 5^e

Établissement : Lycée Claudel, Ottawa

Encadrés par : Nathalie Brassset

Chercheur : Gilles Bailly-Maître, Université de La Rochelle

Introduction

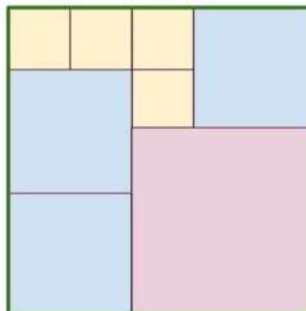
L'article qui suit vous présentera un travail de recherche réalisé dans le cadre d'un atelier MEJ. Dans une première partie, nous allons vous décrire le problème qui nous a été donné. Dans un second temps, nous parlons de la méthode de recherche que nous avons utilisée. La troisième partie permettra de démontrer que le problème n'a pas toujours des solutions. Finalement, la quatrième partie est un algorithme pour trouver des solutions à notre problème.

I. Le problème

Notre problème se nommait "Des carrés dans des carrés". Le voici: "Un fabricant de puzzles réalise des puzzles carrés avec des pièces toutes carrées. Les pièces peuvent être de tailles différentes mais doivent toutes être carrées et le résultat doit être un carré. Sur chaque boîte de puzzle il inscrit le nombre de pièces de puzzle."

Nous devons trouver les nombres que le fabricant ne pourrait jamais écrire sur la boîte et ceux qu'il pourrait écrire.

Exemple : Ceci est un puzzle de 8 pièces carrées.

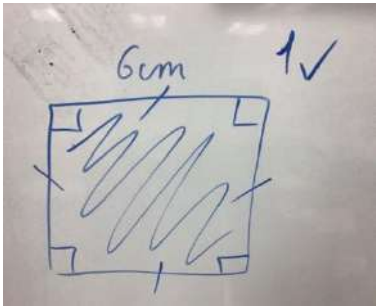
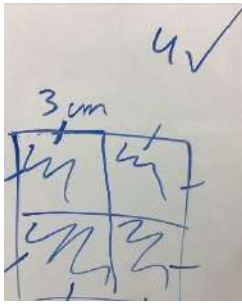
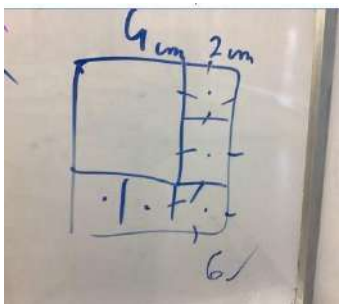
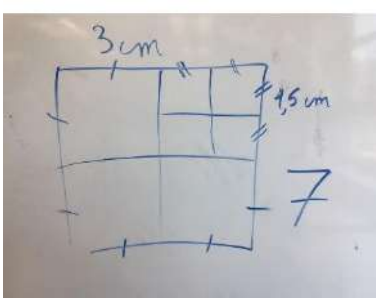
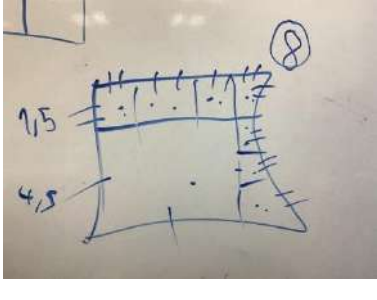
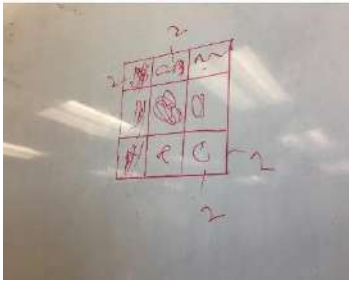
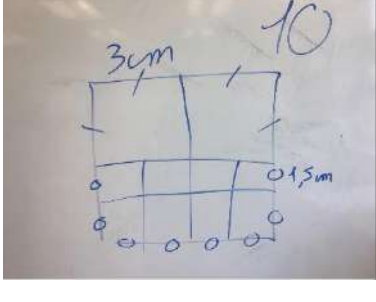
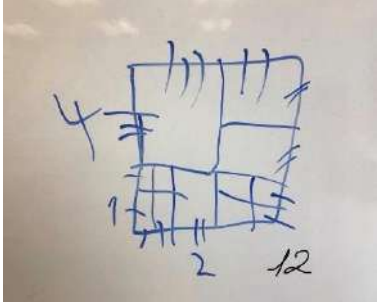
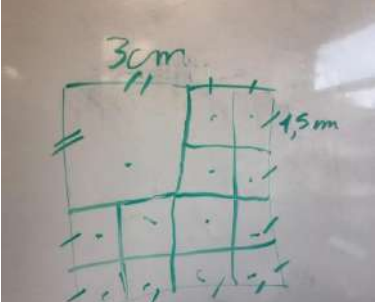


II. Méthode de recherche

1. Essais

Nous avons fait plusieurs essais jusqu'au moment où nous avons trouvé des solutions. Nous avons trouvé qu'il était possible de faire un puzzle carré avec: 1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12 ou 13 pièces carrées.

Remarque : nous avons trouvé facilement les puzzles de 9 pièces et 4 pièces, mais ceux comme le 6 pièces et le 8 pièces ont pris plus de temps.

		
1 pièce	4 pièces	6 pièces
		
7 pièces	8 pièces	9 pièces
		
10 pièces	12 pièces	13 pièces

Dans tous nos exemples le carré réalisé avec les pièces fait 6 cm de côté. Nous aurions pu faire des carrés d'une autre longueur mais nous avons choisi 6 car c'était plus facile à découper pour les premiers essais que nous avons envisagés. Si on nous donnait une longueur de 20 cm ou n'importe quelle autre longueur, nous serions capables de trouver les dimensions des pièces du puzzle.

Exemple : 6 pièces pour un puzzle de 20 cm de côtés

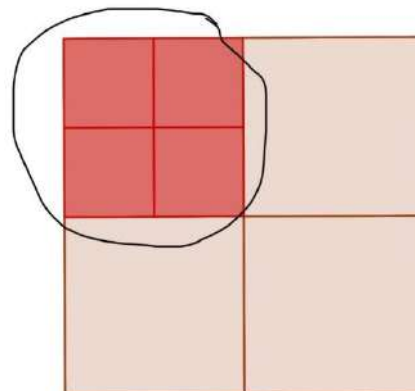
	Dimensions des pièces			
Puzzle de 6cm	6	4	2	1
Puzzle de 20cm	20	$4 \times 20/6 = 80/6$	$2 \times 20/6 = 40/6$	$20/6$

(Il s'agit d'un tableau de proportionnalité.)

2. Les régularités

Nous avons réalisé qu'on peut faire un carré composé de sept carrés en prenant un quart du carré et en le coupant, alors $4 - 1 + 4 = 7$. Après ça, nous avons pris un autre carré composé de sept carrés et nous l'avons coupé en quatre. Grâce à ça, nous avons trouvé un carré composé de dix carrés. Ensuite, nous avons répété ce processus pour trouver 13, 16, 19 etc. Nous pouvons réitérer ce processus à l'infini.

Nous avons ainsi obtenu toute une suite de valeurs : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28,,



Par la suite nous avons cherché toutes les valeurs que nous pouvions atteindre en utilisant notre régularité.

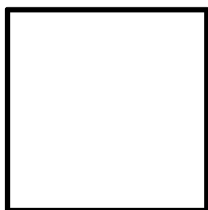
Le puzzle est constitué de *nombre de carrés* pièces au départ. Dans une de ses pièces carrées nous enlevons un carré et en ajoutons quatre donc nous ajoutons trois carrés.

Le puzzle est alors constitué de *nombre de carrés + 3* pièces.

Par la suite nous avons utilisé cette méthode à partir des essais que nous avons fait dans le paragraphe 1.

3. Recherche systématique en s'appuyant sur les régularités

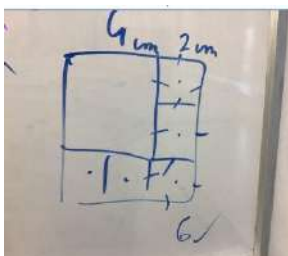
a. À partir de 1



Nous avons vu dans le paragraphe précédent que nous pouvons construire des puzzles carrés de 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, etc. pièces.

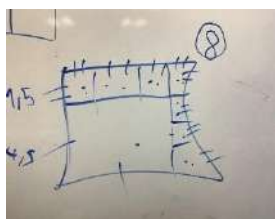
Nous pouvons donc obtenir tous les nombres de la forme $1 + 3 \times \text{nombre de fois où l'on réitère le motif}$.

b. À partir de 6



En partant du puzzle suivant :
 Nous pouvons obtenir 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, etc.
 En itérant le motif, il est possible d'obtenir tous les nombres de la forme $6 + 3 \times \text{nombre de fois où l'on réitère le motif}$.
 Nous pouvons donc construire des puzzles carrés de 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, etc. pièces.

c. À partir de 8



On peut obtenir 11, 14, 17, etc. On peut donc obtenir tous les nombres de la forme $8 + 3 \times \text{nombre de fois où l'on réitère le motif}$.

d. Conclusion

Reprenons dans le tableau qui suit les différentes valeurs que nous avons obtenues :

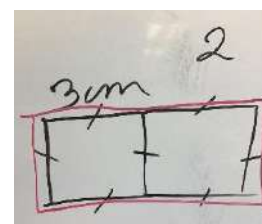
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Paragraphe 1	X			X		X	X	X	X	X		X	X						
Paragraphe 3.a				X			X			X			X			X			X
Paragraphe 3.b						X			X			X			X				X
Paragraphe 3.c								X			X			X			X		

En utilisant notre méthode des régularités nous obtenons tous les nombres sauf 2, 3 et 5.
 Le fait que nous n'ayons pas trouvé 2, 3 et 5 ne nous permet pas d'affirmer qu'il n'est pas possible de les trouver. Dans le paragraphe qui suit nous allons essayer de démontrer que ce n'est pas possible.

III. Pourquoi il n'est pas possible d'obtenir 2, 3, et 5

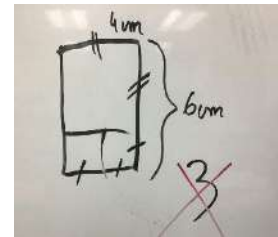
1. Puzzle carré de 2 pièces carrées :

On ne peut pas obtenir un carré avec 2 carrés car ça formerait un rectangle puisque chaque sommet du carré est un sommet d'une pièce du puzzle.



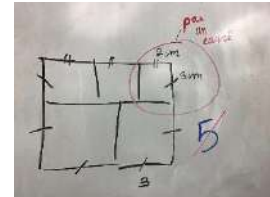
2. Puzzle carré de 3 pièces carrées :

Là encore on utilise le fait que chaque sommet du carré est le sommet d'une pièce. La seule façon de créer un quadrilatère avec 3 carrés est représentée ci-dessous. Les côtés ne sont pas de la même longueur, donc ce n'est pas un carré.



3. Puzzle carré de 5 pièces carrées :

Chaque coin du carré correspond à une pièce du puzzle différente. On place 4 pièces, il faut ensuite placer une 5ème pièce carrée. On obtient alors un rectangle mais pas un carré.



Remarque : pour montrer que ce n'est pas possible nous utilisons le fait que chaque coin du carré doit être le coin d'une pièce.

IV. Algorithme pour expliquer comment faire N carrés dans un carré avec N qui ne fait pas partie des valeurs 2,3 et 5

1. Comment fabriquer un puzzle de 2020 pièces ?

A=2020	B=3
20	
-18	
=2	
22	
-21	
=1	Q=673
10	
-9	
=1	
R=1	

On divise 2020 par 3, puis on additionne 3 au reste jusqu'à quand le résultat atterrit dans le motif auquel il appartient. 2020 a 1 comme reste et si on additionne 3, il tombe dans la régularité de 4. Directement en partant de 1 voir paragraphe 3a.

En partant du puzzle à une pièce (puzzle de départ) il suffit de répéter 673 fois le motif car $2020 = 1 + 673 \times 3$

2. Comment fabriquer un puzzle de 2019 pièces ?

A=2019	B=3
20	
-18	
=2	
21	
-21	
=0	Q=673
09	
-9	
=0	
R=0	

On divise 2019 par 3, puis on additionne 3 au reste jusqu'à quand le résultat atterrit dans le motif auquel il appartient. 2019 a pour reste 0 et si on additionne 3 deux fois on atterrit dans la régularité de 6.

En partant du puzzle à six pièces (puzzle de départ) il suffit de répéter $673 - 2 = 671$ fois le motif car $2019 = 6 + 671 \times 3$.

3. Comment fabriquer un puzzle de 2021 pièces ?

A=2021	B=3
20	
-18	
=2	
22	
-21	
=1	Q=673
11	
-9	
=2	
R=2	

On divise 2021 par 3, puis on additionne 3 au reste jusqu'à quand le résultat atterrit dans le motif auquel il appartient. 2021 a 2 comme reste et si on additionne 3 deux fois on atterrit dans la régularité de 8.

En partant du puzzle à huit pièces (puzzle de départ) il suffit de réitérer $673 - 2 = 671$ fois le motif car $2021 = 8 + 671 \times 3$.

4. Comment fabriquer un puzzle de A pièces ?

On divise le nombre choisi par $B = 3$, puis on additionne 3 au reste R jusqu'à quand il tombe dans un motif.

Le nombre de fois où l'on réitère le motif est *le quotient Q moins le nombre de "bonds" pour aller au puzzle de départ.*

Conclusion

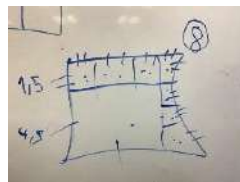
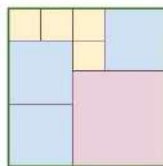
Pour conclure, nous avons fait plusieurs essais, trouvé des régularités et on a fait de la recherche systématique à partir des régularités.

Sur le problème du puzzle, nous avons vu qu'il était possible de construire des puzzles carrés avec autant de pièces carrées que l'on veut. Les seules valeurs qui ne fonctionnent pas sont 2 pièces, 3 pièces et 5 pièces.

Pour chacune des valeurs possibles nous avons proposé une façon de construire le puzzle.

Pour certaines valeurs, nous avons plusieurs façons de construire le puzzle.

Exemple pour 8 pièces :



Nous avons alors de nouvelles questions :

- a-t-on toujours une autre façon de construire le puzzle?
- quand il y a des nouvelles façons, combien de façons différentes existe-il ?