

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Les doublons dans le triangle de Pascal

Année 2024-2025

Mathis Crevet, Isaac Da Costa Teixeira, Clément Déhesdin, Yannick Touré

Établissement : Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Saclay

Chercheurs : Pierre Lanchon, Pierre Pansu et Heorhii Vorobyov (Université Paris-Saclay)

1. Introduction

1.1. Présentation du problème

En France, on donne le nom de Triangle de Pascal à la figure suivante (connue en Chine depuis près d'un millénaire), où chaque nombre est la somme de deux de ses voisins : son voisin du dessus, et le voisin à gauche du voisin de dessus.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

*Construction du nombre 10
dans le Triangle de Pascal*

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Tous les voisins de $\binom{5}{2}$

Il arrive que deux voisins aient la même valeur, et c'est là tout l'enjeu du problème, déterminer quand exactement cela se produit.

1.2. Résultats

Il y a 4 configurations possibles pour des cases adjacentes. En effet, 2 voisins peuvent être alignés :

- horizontalement
- verticalement
- diagonalement vers le haut
- diagonalement vers le bas

Nous avons traité le problème au cas par cas pour arriver à une solution.

Dans le cas de deux voisins horizontaux, il arrive une ligne sur deux que ces derniers aient la même valeur. L'égalité est observée exactement sur les deux voisins du milieu.

Pour les voisins verticaux, l'égalité n'est observée qu'au niveau de la colonne des 1 à gauche du triangle. Étant donné qu'on effectue la somme de deux cases pour en obtenir une troisième, il faut

nécessairement qu'un des deux membres de la somme soit nul pour conserver le même résultat, et c'est exactement ce qui se passe ici, on s'imagine une colonne invisible de zéros en dehors du triangle, et le calcul effectué devient $1 + 0 = 1$.

C'est d'ailleurs exactement le même raisonnement pour les voisins alignés diagonalement vers le bas. Ceux-ci ne sont égaux uniquement sur "l'hypoténuse" du triangle. Une fois de plus, on imagine une ligne de zéros invisibles présente à l'extérieur du triangle.

Pour le dernier cas, celui des voisins sur la diagonale ascendante, nous avons trouvé une formule permettant, à partir de deux voisins égaux, de trouver les deux voisins les plus proches. Le ratio de la distance séparant deux couples de voisins successifs est presque constant, il tend vers la puissance 4 du nombre d'or.

Enfin, nous proposons une extension du triangle de Pascal à tous les entiers relatifs, et nous résolvons la questions des doublons dans ce triangle étendu, trouvant des résultats similaires.

2. Explication détaillée des différentes configurations

Dans le triangle de Pascal, chaque nombre représente le nombre de façons de choisir des éléments d'un ensemble.

Par exemple, le nombre en position (n, k) correspond au nombre de façons de choisir k éléments parmi n , ce qui est appelé un *coefficient binomial*, noté $\binom{n}{k}$ (et lu « k parmi n »).

Il existe une formule pour calculer manuellement un coefficient binomial.

Théorème 1. Soient $k, n \in \mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $k \leq n$. Alors,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Cette formule nous a été très utile pour justifier rigoureusement nos résultats précédents.

Remarque. Le principe derrière la construction du triangle est une conséquence de la formule précédente.

Proposition (Relation de Pascal). Soient $k, n \in \mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $0 < k < n$. Alors,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

2.1. Analyse des éléments sur une même ligne

Commençons par identifier les conditions sous lesquelles deux coefficients binomiaux adjacents situés sur une même ligne sont égaux. Pour cela, examinons l'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ pour tout entier $k, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n > 0$.

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $n > 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} &\iff \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &\iff \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &\iff \frac{1}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{1}{n-k} = \frac{1}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{1}{k+1} \\ &\iff \frac{1}{n-k} = \frac{1}{k+1} \\ &\iff n-k = k+1 \\ &\iff n = 2k+1 \end{aligned} \tag{1}$$

Il en résulte donc que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ lorsque $n := 2k+1$.

Remarque. D'après l'égalité 1, n est un entier impair. En ré-arrangeant l'égalité $n = 2k + 1$, nous obtenons : $k = \frac{n-1}{2}$ (ou encore que $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Cela met en évidence que pour tout n impair, le triangle de Pascal admet deux voisins égaux sur la même ligne si k est situé au milieu de la ligne.

2.2. Analyse des éléments dans une même colonne

Identifions ensuite les conditions qui rendent deux coefficients binomiaux adjacents situés dans une même colonne égaux. Pour cela, analysons l'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$ pour tous les entiers $k, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n > 0$.

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $n > 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} &\iff \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &\iff \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{n-k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &\iff \frac{n}{n-k} = 1 \\ &\iff n = n - k \\ &\iff k = 0 \end{aligned}$$

Or, par définition, $\binom{n}{0} = 1$: il en résulte donc que la première colonne du triangle, étant toujours composé de 1, est la seule manière d'avoir deux voisins égaux dans la même colonne.

Mathématiquement, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ lorsque $k = 0$.

2.3. Analyse des éléments sur une diagonale descendante

Déterminons les conditions dans lesquelles deux coefficients binomiaux adjacents situés sur une même diagonale descendante sont égaux. Pour ce faire, analysons l'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ pour tout entiers $k, n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} &\iff \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k-1)!} \\ &\iff \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &\iff \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &\iff \frac{n}{k} = 1 \\ &\iff n = k \end{aligned}$$

Or, par définition, $\binom{n}{n} = 1$: il en résulte donc que les seuls voisins sur une même diagonale descendante se situent sur « l'hypoténuse » du triangle, étant toujours composé de 1.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Mathématiquement, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ pour tout entier $n, k \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 < n = k$.

2.4. Analyse des éléments sur une diagonale ascendante

Pour ce dernier cas, nous ne trouvons pas directement de réponse concluante, nous avons donc commencé par écrire un programme informatique pour trouver quelques couples égaux, car cette configuration est extrêmement rare. Le principe du programme est très simple, il calcule chaque coefficient binomial et le compare au voisin en bas à gauche. Nous obtenons donc une liste des positions des premiers voisins égaux.

En voyant cette suite de nombres, notre premier réflexe a été de vérifier s'il n'y avait pas un facteur commun entre ceux-ci et effectivement, le ratio de deux lignes ou deux colonnes successives semble converger vers une certaine valeur, (environ 6.85). Par pure coïncidence, nous avons déterminé que cette valeur correspondait au nombre d'or (ϕ) à la puissance 4. À ce moment-là, ce n'était alors qu'une vague intuition.

Ensuite, nous avons procédé comme les autres cas en partant de l'équation avec les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k}$$

En développant puis en simplifiant, nous obtenons cette équation :

$$k^2 - 3kn - k + n + n^2 = 0$$

dont on exprime la racine :

$$k = \frac{3n+1 - \sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$$

Comme nous travaillons sur des entiers, il existe une condition sur le terme sous la racine qui doit être un carré parfait.

$$5n^2 + 2n + 1 = Y^2$$

Nous nous rapportons donc à une équation diophantienne à deux inconnues entières et en effectuant un changement de variable, nous obtenons finalement une équation dite de Pell-Fermat :

$$\begin{aligned} X^2 - 5Y^2 &= -4 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{X+Y\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{X-Y\sqrt{5}}{2}\right) &= -4 \end{aligned}$$

Avec $X = 5n + 1$ (on rappelle que n correspond au numéro d'une ligne du triangle). Il suffit alors de trouver tous les couples d'entiers positifs solutions de cette équation.

Lemme 1. *Un couple $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ est solution de l'équation $\left(\frac{a+b\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{a-b\sqrt{5}}{2}\right) = \pm 1$ si et seulement si il existe un entier n tel que $\frac{a+b\sqrt{5}}{2} = \varphi^n$, avec φ le nombre d'or.*

Corollaire 1. *Avec ce lemme, ainsi que le fait que $X \equiv 1 \pmod{5}$, on peut considérer le couple $(X, Y) \in \mathbb{N}^{*2}$ solution de l'équation $X^2 - 5Y^2 = -4$ alors :*

$$\frac{X+Y\sqrt{5}}{2} = \varphi^{4m+1} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{X-Y\sqrt{5}}{2} = \bar{\varphi}^{4m+1} \cdot m \in \mathbb{N}$$

(X, Y) étant solution, en sommant les 2 expressions, nous obtenons une expression pour X , et donc aussi de n , en fonction de puissances de φ et $\bar{\varphi}$ (2) :

$$\varphi^{4m+1} + \bar{\varphi}^{4m+1} = X_m$$

(Rappel que $X = 5n + 1$)

$$\Leftrightarrow 5n + 1 = \varphi^{4m+1} + \bar{\varphi}^{4m+1}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{5}(\varphi^{4m+1} + \bar{\varphi}^{4m+1} - 1), m \in \mathbb{N}^*.$$

Remarque. Pour ce problème, nous avons $m \in \mathbb{N}^*$ car pour $m = 0$, nous trouvons $n = 0$, nous serions donc en train d'étudier

$$\begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

ce qui n'est pas défini $\forall k \in \mathbb{N} \dots$ pour l'instant.

Nous pouvons aussi soustraire les 2 expressions, qui nous donnent $Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{4m+1} - \bar{\varphi}^{4m+1})$.

En sachant que $k = \frac{3n+1-Y}{2}$, en substituant l'expression de Y , et en développant grâce à des propriétés de φ et $\bar{\varphi}$, nous finissons par trouver

$$k = \frac{1}{5}(\varphi^{4m-1} + \bar{\varphi}^{4m-1} + 1), m \in \mathbb{N}^*$$

2.4.1 Lien avec la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci (notée F_n), est la suite définie par récurrence d'ordre 2, telle que

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}.$$

Cette dernière possède une expression sous forme explicite $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\varphi^n - \bar{\varphi}^n)$$

Avec cette définition, nous pouvons encore une fois utiliser les propriétés algébriques de φ et $\bar{\varphi}$ pour obtenir

$$\boxed{n = F_{2m}F_{2m+1}}, m \in \mathbb{N}^*.$$

et

$$\boxed{k = F_{2m}F_{2m-1}}, m \in \mathbb{N}^*.$$

La résolution de notre problème nous a donc permis de découvrir l'identité

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{2m}F_{2m+1}-1 \\ F_{2m}F_{2m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{2m}F_{2m+1} \\ F_{2m}F_{2m-1}-1 \end{pmatrix}}.$$

2.4.2 Démonstration du Lemme 1

Heuristique. Un programme nous a permis de déterminer les premières solutions de l'équation diophantienne. Nous avons observé expérimentalement que les ratios de deux solutions successives convergeaient vers 6,854... En essayant diverses constantes usuelles, nous avons deviné que φ^4 correspondait. Or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ code lui-même une solution de l'équation diophantienne. Cela nous a mis sur la voie.

Démarche. Soit $A = \frac{a+b\sqrt{5}}{2}$ une solution de $(\frac{a+b\sqrt{5}}{2})(\frac{a-b\sqrt{5}}{2}) = \pm 1$, avec $a \geq 1$ et $b > 1$. On vérifie que $A' = A/\varphi$, qui peut aussi s'écrire sous la forme $\frac{a'+b'\sqrt{5}}{2}$ avec a' et b' entiers, est à nouveau une solution de l'équation. De plus, $0 \leq a' < a$ et $0 \leq b' < b$. Recommençons l'opération avec A' . Au bout d'un nombre fini d'étapes, $b' = 0$ ou 1, ce qui correspond à $A' = 1, \varphi$ ou φ^2 . On conclut, par récurrence sur b , que A est une puissance de φ .

On trouvera une démonstration détaillée dans la version longue de notre article, <http://www.math.u-psud.fr/%7Eepansu/Doublons.pdf>.

3. Le cas des réels

3.1. Introduction

Après avoir résolu notre problème sur les entiers naturels on se demande naturellement comment généraliser ce résultat aux entiers négatifs.

C'est ce que l'on va entreprendre ici.

On énoncera quelques résultats importants sur les réels mais on s'attardera de manière prononcée sur les entiers des deux signes.

3.2. Préliminaires

Il est bon de rappeler certaines propriétés que nous utiliserons par la suite pour les démonstrations.

3.2.1 Fonction Gamma

- On définit la fonction Gamma sur \mathbb{R}_+^* par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On utilisera cette fonction comme généralisation de la factorielle aux réels non négatifs et non nuls grâce à une propriété classique de cette intégrale. En effet en intégrant par parties, on vérifie que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1). \quad (2)$$

On peut en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

- On peut de plus prolonger la fonction gamma à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. Malheureusement, on ne peut pas prolonger Gamma à \mathbb{Z}^- car on rencontre des pôles.

Le prolongement s'effectue en utilisant la propriété (2),

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1).$$

En itérant cette propriété, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Gamma(x) = \left(\prod_{i=0}^n \frac{1}{x+i} \right) \Gamma(x+n+1). \quad (3)$$

Comme

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \exists n \geq n_0, \quad x+n+1 > 0,$$

on peut prolonger la fonction Gamma, cette fonction sera alors toujours définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ mais pas jusqu'à \mathbb{Z}^- , car ce prolongement conduirait à une forme indéterminée sur les entiers négatifs, y compris en 0. En effet,

$$\lim_{x \rightarrow -n} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow -n} \left(\prod_{i=0}^n \frac{1}{x+i} \right) \Gamma(x+n+1) = \pm\infty,$$

cela est dû à la divergence du terme en n du produit.

3.2.2 Prolongement du coefficient binomial.

On notera à partir de maintenant,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}$$

On considère en effet la fonction $\Gamma(x+1)$ comme un prolongement aux réels de $x!$.

3.2.3 Rappel sur les factorielles

Il est bon de rappeler quelques propriétés que nous utiliserons.

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \prod_{i=1}^n i,$$

$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n!} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Notre objectif sera à partir de maintenant de construire pour tout couple (α, β) et notamment lorsque ceux-ci sont des entiers négatifs, un coefficient binomial $\binom{\alpha}{\beta}$.

3.3. Construction d'un coefficient binomial pour chaque α et β

On divise l'ensemble des couples d'entiers négatifs en trois zones, et sur chaque zone, on propose une valeur du coefficient binomial, en se laissant guider par une des identités satisfaites par les coefficients binomiaux classiques.

$$— \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2, (\alpha \geq 0, \beta < 0) \vee (\beta > \alpha \geq 0) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = 0$$

$$— \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2, (\alpha \leq 0, \beta \geq 0) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = (-1)^\beta \binom{\beta - \alpha - 1}{\beta} \quad \text{Première identité}$$

$$— \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2, (\alpha < 0, \beta < 0) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = (-1)^{\alpha - \beta} \binom{-\beta - 1}{-\alpha - 1} \quad \text{Seconde identité}$$

On note que pour chacune des zones ci-dessus, on ramène notre coefficient binomial d'entiers à un coefficient binomial déjà présent dans le triangle de Pascal classique.

3.3.1 Première zone

On se donne deux entiers quelconques α et β avec pour conditions que α soit positif et que β soit strictement négatif.

Ainsi le coefficient binomial $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}$ converge vers 0, en effet seul $\Gamma(\beta+1)$ n'est pas défini par l'intégrale et diverge donc.

De plus dans le cas où cette fois-ci c'est la condition $\beta > \alpha \geq 0$ qui s'applique à nos deux entiers alors c'est au tour de $\Gamma(\beta - \alpha + 1)$ de diverger.

3.3.2 Seconde zone : première identité

On se donne deux entiers α et β avec pour conditions que α soit strictement négatif et que β soit strictement positif.

De cette manière ce sera $\Gamma(\alpha+1)$ au numérateur et $\Gamma(\alpha-\beta+1)$ au dénominateur n'étant pas défini par l'intégrale. On introduit alors $d\alpha$ un réel voué à tendre vers 0 de telle sorte que $\alpha + d\alpha$ est un réel non entier.

On considère alors le coefficient $\binom{\alpha+d\alpha}{\beta}$ qui est bien défini par l'égalité

$$\binom{\alpha+d\alpha}{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \left(\prod_{i=0}^{-\alpha-1} \frac{1}{\alpha+d\alpha+1+i} \right) \Gamma(d\alpha+1) \left(\prod_{k=0}^{\beta-\alpha-1} \alpha+d\alpha-\beta+1+k \right) \frac{1}{\Gamma(d\alpha+1)}.$$

On peut alors sortir les derniers termes de chaque produit nous donnant la quantité $\frac{d\alpha}{d\alpha} = 1$. On peut alors faire tendre $d\alpha$ vers 0 sans création d'une forme indéterminée. Tous les termes restant dans le produit sont donc négatifs mais sont également des entiers naturels en valeur absolue, on fera donc apparaître des factorielles et donc un coefficient binomial déjà présent dans le triangle de Pascal. Précisément,

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \left(\prod_{i=0}^{-\alpha-2} \frac{1}{\alpha+1+i} \right) \left(\prod_{k=0}^{\beta-\alpha-2} \alpha - \beta + 1 + k \right) = (-1)^\beta \binom{\beta-\alpha-1}{\beta}.$$

De plus si β est nul alors $\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\beta-\alpha-1}{0}$ et si α est nul alors $\binom{0}{\beta} = 1$ si β l'est aussi et 0 sinon (par divergence de $\Gamma(-\beta+1)$). Ceci est également le cas pour $\binom{\beta-1}{\beta}$ qui vaut 0 là aussi par divergence de $\Gamma(\beta-1-\beta+1)$ lorsque β est non nul.

De manière générale en prenant α et β des réels non nuls non entiers satisfaisant les mêmes conditions et en écrivant le rapport $\frac{\binom{\alpha}{\beta}}{\binom{\beta-\alpha-1}{\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} = \frac{\sin(\pi(\alpha-\beta))}{\sin(\pi\alpha)}$ par la formule des compléments (3). On peut de plus retrouver le résultat sur les entiers en réintroduisant $d\alpha$ et en utilisant les formules d'addition.

3.3.3 Troisième zone : seconde identité

Soient α et β des entiers strictement négatifs avec pour conditions α et β des entiers négatifs. On introduit cette fois-ci $d\beta$ en plus de $d\alpha$. Si on choisit de plus de que $\alpha \geq \beta$, alors on doit prolonger uniquement $\Gamma(\alpha+d\alpha+1)$ et $\Gamma(\beta+d\beta+1)$ de tel sorte que (après sortie du dernier terme des produits) :

$$\binom{\alpha+d\alpha}{\beta+d\beta} = \frac{\Gamma(d\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+d\alpha-d\beta+1)\Gamma(d\beta+1)} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \left(\prod_{i=0}^{-\alpha-2} \frac{1}{\alpha+d\alpha+1+i} \right) \cdot \left(\prod_{i=0}^{-\beta-2} \beta+d\beta+1+i \right).$$

On va donc faire tendre successivement $d\alpha$ puis $d\beta$ vers 0, ou vice versa, pour obtenir que

$$\binom{\alpha+d\alpha}{\beta+d\beta} \underset{d\alpha, d\beta \rightarrow 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot (-1)^{-\alpha-\beta} \cdot \binom{-\beta-1}{-\alpha-1}.$$

Maintenant que le lien entre $\binom{\alpha}{\beta}$ et $\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$ est établi, on peut de nouveau faire appel, dans le cadre général où α et β sont des réels satisfaisant les mêmes conditions qu'en 3.0, à la formule des compléments,

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi\alpha)} \binom{-\beta-1}{-\alpha-1}.$$

On peut dès lors retrouver la formule ci-dessus sans la conditions $\alpha \geq \beta$

Malheureusement, la quantité $\frac{d\beta}{d\alpha}$ freine notre avancée. Pour régler ce problème on doit généraliser une propriété de symétrie du triangle de Pascal.

En effet quels que soient des réels non entiers, il suffit d'écrire sous forme de fonction Γ les coefficients $\binom{\alpha}{\beta}$ et $\binom{\alpha}{\alpha-\beta}$ pour s'apercevoir d'une égalité.

Ainsi, sous nos conditions, $\binom{\alpha+d\alpha}{\beta+d\beta} = \binom{\alpha+d\alpha}{\alpha-\beta+d\alpha-d\beta}$. Si on ajoute de plus la condition que $\alpha \geq \beta$ alors on peut appliquer le deuxième point pour s'apercevoir que, après avoir fait tendre $d\alpha$ et $d\beta$ vers 0,

$$\binom{\alpha}{\beta} = (-1)^{\alpha-\beta} \binom{-\beta-1}{\alpha-\beta} = (-1)^{\alpha-\beta} \binom{-\beta-1}{-\alpha-1}.$$

Dont la dernière égalité vient de nouveau de cette propriété de symétrie.

Dans le cas où nous n'avons pas $\alpha \geq \beta$ alors $\binom{-\alpha-1}{-\beta-1} = 0$, la limite $\frac{d\beta}{d\alpha}$ devant être bornée, on choisira donc $\binom{\alpha}{\beta} = 0$.

3.4. Symétrie généralisée

Nous venons d'observer une première symétrie, celle qui transforme le couple (α, β) en le couple $(\alpha, \alpha - \beta)$ dont les points fixes nous donnent $\beta = \alpha - \beta$ soit $\alpha = 2\beta$.

Les deux dernières zones mettent en évidence d'autres symétries.

3.4.1 Symétrie de la première identité

On remarque que la transformation qui associe le couple (α, β) au couple $(\beta - \alpha - 1, \beta)$ est une symétrie d'ordre deux, il suffit d'appliquer deux fois cette transformation pour retomber sur l'identité. Les points fixes de cette transformation satisfont $\alpha = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}$. En réalité cette symétrie alterne avec une antisymétrie. En effet, la première identité indique qu'il y a égalité au signe près de $(-1)^\beta$, la symétrie est donc une antisymétrie lorsque β est impair. Cette symétrie ne fonctionne cependant que sous les conditions d'application de la première identité.

3.4.2 Symétrie de la seconde identité

On remarque que la transformation qui associe le couple (α, β) au couple $(-\beta - 1, -\alpha - 1)$ est une symétrie d'ordre 2, il suffit d'appliquer 2 fois cette transformation pour retomber sur l'identité. Les points fixes de cette transformation satisfont $\alpha = -\beta - 1$. De la même façon que précédemment, cette symétrie est une antisymétrie si et seulement si α et β sont de parité différente. Cette symétrie n'est vérifiée que lorsque la seconde identité s'applique.

Finalement, si on se place dans un plan, les axes des symétries $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, $y = 2x$ et $y = -x - 1$ sont concourants au point $(-1/3, -2/3)$. En ce point, la valeur du coefficient binomial est $\binom{-2/3}{-1/3} \approx 1.4609984$, ce qui est très proche du minimum atteint de la fonction Gamma (sur \mathbb{R}_+^*) qui est atteint en 1.4616321 (4).

3.5. Formule de Pascal

On peut s'apercevoir que la formule de Pascal : $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ reste presque toujours vraie sur les entiers relatifs. Prenons α et β de tels entiers, alors

$$\begin{aligned} \binom{\alpha-1}{\beta-1} + \binom{\alpha-1}{\beta} &= \frac{\beta \alpha \Gamma(\alpha)}{\alpha \beta \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha - \beta + 1)} + \frac{(\alpha - \beta) \alpha \Gamma(\alpha)}{\alpha \Gamma(\beta + 1) (\alpha - \beta) \Gamma(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha - \beta + 1)} \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \right) = \binom{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

On doit donc prendre $\alpha \neq \beta$ et tout deux différents de 0.

Cependant, on peut remarquer que grâce à tous nos coefficients binomiaux nuls (dû à la seconde identité et dans la première zone) la formule devient fautive uniquement au cas limite en $\binom{0}{0}$, i.e. quand le coefficient n'est plus nul et donc lorsque $\alpha = \beta = 0$. En résumé la formule est fautive uniquement pour $\binom{-1}{-1} + \binom{-1}{0} \neq \binom{0}{0}$.

3.6. Voisins égaux ou opposés

On va maintenant revenir à notre problème initial : localiser les voisins égaux dans le triangle "étendu" aux entiers négatifs. On va même traiter un problème plus large : cas où des coefficients binomiaux voisins sont égaux ou opposés. On abrège "égaux ou opposés" en $+/-$.

3.6.1 Suite de Fibonacci aux entiers négatifs

On étend la définition de la suite de Fibonacci aux entiers relatifs, en conservant la même relation de récurrence.

On aura par exemple $F_{-1} + F_0 = F_1$ ou bien $F_{-2} + F_{-1} = F_0$.

On peut démontrer par récurrence double que pour un entier naturel n , $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$.

3.6.2 Cas d'égalité de voisins dans le triangle étendu

On rappelle que, lorsque $0 \leq k \leq n$ sont des entiers,

— Voisins verticaux : $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \iff k = 0.$ (1)

— Voisins horizontaux : $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} \iff n = 2k + 1.$ (2)

— Voisins en diagonale descendante : $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \iff n = k.$ (3)

— Voisins en diagonale montante : $\binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k} \iff \exists m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = F_{2m}F_{2m+1} \text{ et } k = F_{2m}F_{2m-1}.$ (4)

Pour étendre ces énoncés aux entiers négatifs, dans chacun des cas non triviaux (où les coefficients ne sont pas nuls) on utilisera respectivement la première ou la seconde identité, cela nous ramenant au cas des entiers positifs, i.e. du triangle de Pascal.

— Sous les conditions de la première identité ($\alpha \leq 0, \beta \geq 0$) :

Voisins verticaux $+/-$ si et seulement si $\beta = 0$ par (1), ce sont des voisins égaux, c'est-à-dire, sans changement de signe.

Voisins horizontaux $+/-$ si et seulement si $\alpha = -1$ par (3), ce sont des voisins opposés, c'est-à-dire, les coefficients binômiaux aux deux cases voisines sont opposés.

Voisins dans la diagonale descendante $+/-$ si et seulement si $\alpha = -\beta - 2$ par (2), ce sont des voisins opposés.

Dans le cas de la diagonale montante, il n'existe pas de solutions. On raisonne par équivalence après application de la propriété de symétrie sur l'égalité $\binom{\beta-\alpha-2}{\beta} = \binom{\beta-\alpha}{\beta+1}$, nous donnant une équation de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = (-\alpha - 2)(3\alpha + 2)$. Les seules valeurs entières de α rendant le discriminant positif ou nul sont -1 et -2 . Seul -2 , avec pour seul β valable 0, conduit à une solution. Or l'égalité est vérifiée uniquement pour $\binom{0}{0} = \binom{-1}{0}$, ce sont des voisins opposés.

— Sous les conditions de la seconde identité $\alpha \leq -1, \beta \leq -1$:

Voisins verticaux $+/-$ si et seulement si $\beta = 2\alpha + 2$ par (2), ce sont des voisins opposés.

Voisins horizontaux $+/-$ si et seulement si $\alpha = -1$ par (1), ce sont des voisins opposés.

Voisins dans la diagonale descendante $+/-$ si et seulement si $\alpha = \beta - 1$ par (2), ce sont des voisins égaux.

Voisins dans la diagonale montante $+/-$ si et seulement si $\beta = F_{-2m}F_{-2m-1} - 2$ et $\alpha = F_{-2m}F_{-2m+1} - 2$, par (4), ce sont des voisins égaux.

En somme, dans le triangle étendu aux entiers relatifs, on sait dire à quels endroits se trouvent des coefficients binômiaux voisins égaux ou opposés.

4. Conclusion

Nous remercions Pierre Lanchon, qui est à l'origine du sujet, pour ses visites, la répétition de l'exposé et sa présence au congrès. La recherche de doublons nous a conduits à la résolution d'une équation diophantienne. Après une phase expérimentale (recherche systématique de solutions aidée par un programme python) qui nous a permis de deviner l'existence d'un lien avec le nombre d'or, nous avons démontré que toutes les solutions s'expriment au moyen des nombres de Fibonacci.

Suivant une suggestion de Pierre Lanchon, nous avons étudié comment définir des coefficients binômiaux aux entiers négatifs. Plutôt que la formule d'addition de Pascal, nous avons privilégié certaines symétries. Heureusement, la formule d'addition reste vraie, à une exception près.

La version longue de notre article, <http://www.math.u-psud.fr/%7Eepansu/Doublons.pdf>, contient les démonstrations détaillées, des compléments (sur les symétries du triangle de Pascal étendu), ainsi qu'une figure.

Notes d'édition

- (1) L'édition invite le lecteur à s'interroger sur les puissances du nombre dor.
- (2) L'édition rappelle que $\bar{\varphi} = 1 - \varphi$.
- (3) L'édition signale que la formule des compléments nécessite des connaissances avancées en analyse complexe.
- (4) L'édition corrige une confusion entre minimum et point de minimum.