# Empilements de disques

Année 2024 – 2025

Jack Pieri, Lise Lemaitre, élèves de classe 2nde

Établissement : Lycée Simone Veil

Enseignantes : Delphine Paul, Elena Mong The Yen

Chercheur : Nicolas Bédaride, Université Aix Marseille, Institut de mathématiques de Marseille

## 1. Introduction

### 1.1. Présentation du sujet

Le chercheur nous a donné ce sujet en début d'année :

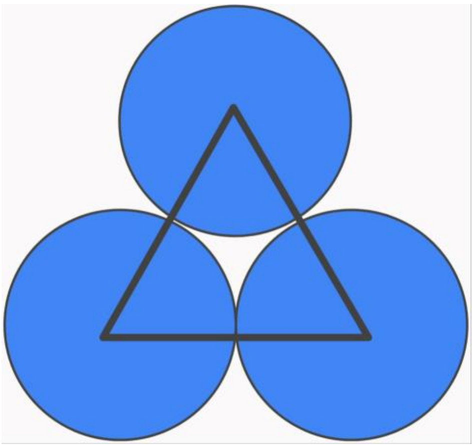
« On considère un ensemble de pièces de monnaie. On veut étaler ces pièces sur une table (1) sans chevauchement et en recouvrant le maximum de surface. Comment faire ? On pourra s'intéresser d'abord au cas où l'on a un seul type de pièces, puis deux, ... ».

Cela revient à effectuer des calculs de densité sur les configurations possibles. On calculera donc le remplissage/la densité avec la formule :

$$\frac{Aire\ remplie}{Aire\ totale}$$

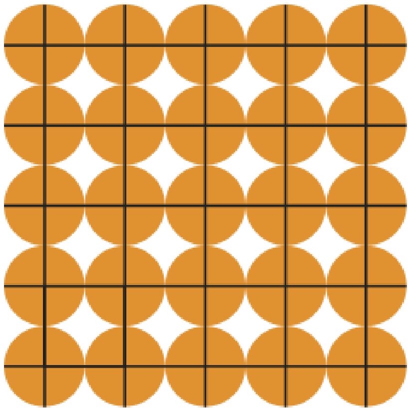
### 1.2. Résultats

Nous avons trouvé que la meilleure méthode avec un rayon est de disposer les disques afin que leurs centres forment des triangles équilatéraux, et avec deux rayons en utilisant la même méthode mais en remplissant le vide entre les disques avec un petit disque ; ces méthodes ayant des densités respectivement de 90.69% et 95%. D'autres méthodes, comme celle qui consiste à disposer les disques afin que leurs centres forment des carrés, ont des densités inférieures.



## 2. Un rayon de disque

### 2.1. Méthode 1

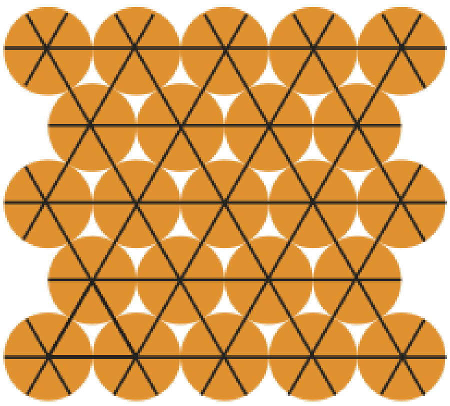


La méthode 1 consiste à découper la surface en petits carrés dans lesquels le côté est égal au diamètre du disque et remplir chaque carré avec un disque. Cette méthode peut donc se simplifier à un seul carré rempli d'un seul disque. On calcule le remplissage avec l'aire du disque sur l'aire du carré. L'aire du disque est égale à $\pi r^2$ et l'aire du carré est égale au carré de son côté soit $(2r)^2$.

$$\frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \approx 78.5\%$$

Donc pour un disque dans un carré le remplissage est de 78.5% à peu près ou plus précisément $\frac{\pi}{4}$.
Pour plus de disques, il y aura toujours le même nombre de carrés que de disques et cela revient à multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre (ce qui ne change pas la proportion).
Donc, toutes les méthodes à base de figures géométriques constituées de carrés auront le même remplissage. Cela se répète de façon périodique.

### 2.2. Méthode 2



### 2.2.1. Triangle équilatéral

La méthode 2 consiste à disposer les disques afin que leurs centres forment des triangles équilatéraux 3 à 3. On prend pour unité un triangle équilatéral car il est répété à chaque fois et il représente donc la simplification de toute situation avec cette méthode.
On calcule le remplissage de cette méthode avec l'aire des trois arcs de cercles sur l'aire du triangle. Les trois arcs de cercles sont des sixièmes de cercles (car chaque angle d'un triangle équilatéral est égal à 60° et 60° est $\frac{1}{6}$ de 360°) et leur aire combinée est donc un demi-cercle. La base du triangle est égale au diamètre des disques et sa hauteur est égale à la racine carrée de la différence des carrés du diamètre et du rayon.

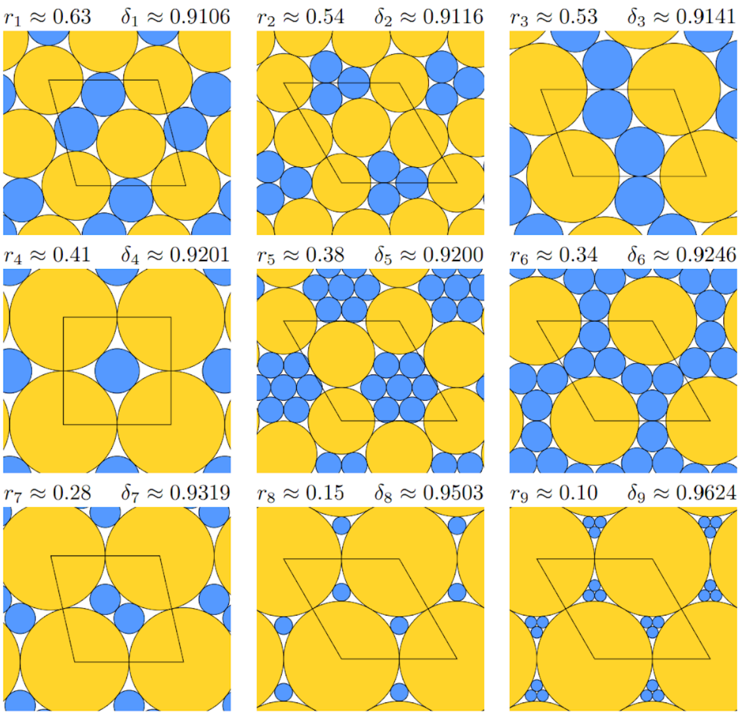
$$\frac{0.5\pi r^2}{\frac{2r\sqrt{(2r)^2-r^2}}{2}} = \frac{0.5\pi r^2}{r\sqrt{(2r)^2-r^2}} = \frac{0.5\pi r^2}{r^2\sqrt{3}} = \frac{0.5\pi}{\sqrt{3}} \approx 90.69\%$$

### 2.2.2. Hexagone régulier

Nous pouvons également disposer des disques afin de former un hexagone régulier qui peut être découpé en six triangles. Il est inscriptible dans un cercle, ses sommets sont donc équidistants du centre. Les angles au centre de l'hexagone sont égaux et leur somme vaut 360°. Les angles des triangles sont tous égaux à 60°. Donc un hexagone régulier est constitué de triangles équilatéraux.
Son remplissage est le même que celle du triangle équilatéral, soit $\frac{0.5\pi}{\sqrt{3}}$.
On peut donc en déduire que toutes les méthodes à base de figures géométriques constituées de triangles équilatéraux auront le même remplissage. Cela se répète de façon périodique.

## 3. Deux rayons de disque

Le diagramme suivant représente neuf configurations avec deux rayons de disques. Nous en avons étudié 3 : la quatrième, la septième et la huitième en comptant de gauche à droite, ligne par ligne.



## 3.1. Figure 4

Pour pouvoir calculer le remplissage de la figure comportant 4 disques comme dans la méthode 1 avec un petit disque placé entre eux, il faut d'abord rechercher le rayon nécessaire pour le petit disque. D'après le théorème de Pythagore la racine carrée de la somme des longueurs des deux côtés au carré soit $\sqrt{2(2r)^2}$ est égale à la longueur de la diagonale de ce carré. Nous pouvons alors soustraire $2r$ afin d'obtenir le diamètre du petit disque, puis diviser par deux pour obtenir le rayon :

$$\frac{\sqrt{2(2r)^2}-2r}{2}=\frac{\sqrt{8r^2}-2r}{2}$$

Si nous remplaçons de rayon du grand disque par 1 alors le rayon du petit disque est égal à $\sqrt{2}-1$ soit environ 0.414 :

$$\frac{\sqrt{8\times 1^2}-2\times 1}{2}=\frac{\sqrt{8}-2}{2}=\sqrt{2}-1\approx 0.414$$

Nous pouvons alors calculer la densité qui correspond à la somme de l'aire des 4 disques présente dans la méthode 1 et de l'aire du petit disque, l'ensemble divisé par l'aire totale soit 4.

$$Aire\ remplie\ =\pi+\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2=-2\sqrt{2}\pi+4\pi\approx 3.68$$

$$Densité=\frac{-2\sqrt{2}\pi+4\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}\pi+2\pi}{2}\approx 0.92$$

La densité est donc d'environ 92 %.

## 3.2. Figure 7

Nous disposons de 2 disques placés entre quatre disques de taille supérieure formant ainsi un losange. Nous recherchons le rayon du petit disque sachant que celui du grand disque est de 1.
Un triangle rectangle du losange est formé de la moitié de la petite diagonale du losange, le rayon $r$ du petit disque et la longueur $1+r$. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, la moitié de la petite diagonale est égal à :

$$\sqrt{(1+r)^2-r^2}=\sqrt{1+r^2+2r-r^2}=\sqrt{1+2r}$$

Un losange est divisé en quatre triangles rectangles. Ainsi si nous prenons un de ces triangles rectangles, l'hypoténuse au carré est égale à la somme des deux côtés au carré d'après le théorème de Pythagore :

$$4=(1+2r)^2+1+2r\Leftrightarrow 4r^2+6r-2=0$$

D'après la propriété des équations de second degré, le rayon du petit disque vaut environ 0.280 :

$$\Delta=6^2-4\times 4\times(-2)=68$$

$\Delta > 0$, donc il existe deux solutions :

$$r_1=\frac{-6+\sqrt{68}}{8}\approx 0.280$$

$$r_2=\frac{-6-\sqrt{68}}{8}\approx -1.781$$

La solution $r_2$ est impossible car il est négatif. Nous prendrons donc $r_1$qui est égal à 0.280.

La densité est égale à l'aire remplie divisée par l'aire totale. Cette dernière correspond au produit des diagonales du losange divisé par 2 :

$$Aire\ totale = \frac{\big(2 \times (1 + 2 \times 0.28)\big)\big(2\sqrt{1 + 2 \times 0.28}\big)}{2} \approx \frac{3.12 \times 2.5}{2} \approx 3.9$$

L'aire remplie, quant à elle, est égale à la somme de l'aire des quatre grands disques et de l'aire des deux petits disques.

$Aire\ remplie = \pi + 2(\pi \times 0.28^2) \approx 3.63$

$Densité \approx \dfrac{3.63}{3.9} \approx 0.932$

La densité est environ égale à 93%.

### 3.3. Figure 8

La figure 8 peut être découpée en deux pour former un triangle avec les 3 disques de la méthode 2 et un petit disque au centre. Nous recherchons alors le rayon du petit disque si le rayon du grand disque est égal à 1 afin de pouvoir calculer la densité de la figure. La hauteur est égale à la racine carrée de la différence des carrés du diamètre et du rayon du grand disque :

$$h = \sqrt{(2r)^2 - (1r)^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

Or, la hauteur est égale à la somme du rayon du grand disque soit 1, du rayon du petit disque et de la longueur en-dessous du petit disque. Cette dernière est $\frac{1}{3}$ de la hauteur car le centre du petit disque est l'intersection des médianes, soit le centre de gravité. Donc :

$$\sqrt{3} = 1 + r + \frac{1}{3}\sqrt{3} \Leftrightarrow r = \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \Leftrightarrow r = 0.15$$

Le rayon du petit disque est donc égal à 0.15.

Nous recherchons maintenant la densité qui est égale à l'aire remplie divisée par l'aire totale.

$$Aire\ totale = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$Aire\ remplie = 0.5\pi \times 1^2 + \pi \times 0.15^2$$

$$Densité = \frac{0.5\pi \times 1^2 + \pi \times 0.15^2}{\sqrt{3}} \approx 0.95$$

La densité de la figure est d'environ 95 %.

## 4. Conclusion

La méthode 1 est donc la meilleure, à la fois pour un seul rayon de disque et pour deux, si l’on veut disposer des disques sans chevauchement en prenant le plus de place possible. Le théorème d'Alex Thue (2) le prouve.

## Notes d’édition

(1) Le mot « table » est important. Tout ce problème se déroule dans une portion bornée du plan comme un rectangle, et non dans le plan tout entier où il n’aurait pas de sens.

(2) La question étudiée dans cet article est le cas plan d’un fameux problème, dit de Kepler, sur la empilement des sphères optimal. Le cas plan a été résolu par Alex Thue, puis Laszlo Fejes Toth.