Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition

Fabrique de puzzle

Année 2023 – 2024

Elias Faucher, Kéo Matabon-Mauro, Julien Coti-Jasmin, Samuel Whelan, Thaddius Genniaux, Ivan Zampaglione, élèves de classes de 3[ème] et de 1[ère]

Établissement(s) : **Lycée Raymond Savignac** de Villefranche de Rouergue

Collège Georges Pompidou de Cajarc

Enseignant·e(s) : Mme Vernhet, M Thomas, M Beduer, M Labit

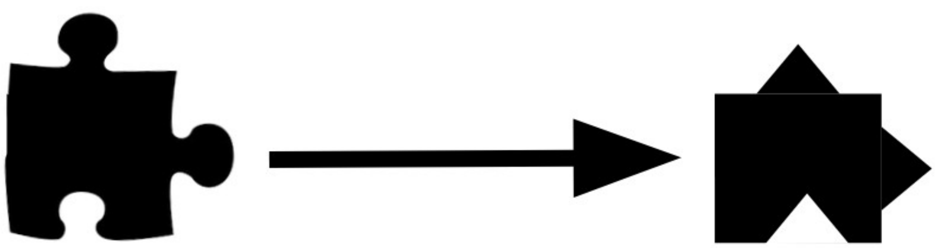
Chercheuse : Mme Klughertz (maklughertz@orange.fr)

Table des matières

1. Introduction

1.1. Sujet

On veut fabriquer des puzzles. A partir de pièces carrées de côté fixé, on est autorisé à modifier les côtés en enlevant un triangle ou en ajoutant un triangle de sorte que les pièces s'emboîtent parfaitement.



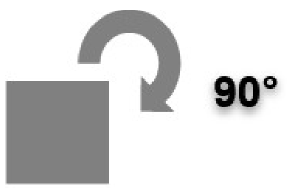
Combien y a-t-il de pièces différentes si on n'autorise ni rotation, ni retournement ?
Même question si on n'autorise que les rotations (et pas les retournements) ?
Et si on autorise rotations et retournements ?

<u>Un puzzle de taille m x n</u> est un ensemble de mn pièces qu'on peut assembler en forme de rectangle de longueur m et de largeur n, sans tourner ni retourner les pièces et que les côtés plats soient uniquement sur les bords.

<u>Un puzzle est unique</u> s'il y a une seule façon d'assembler les pièces (à échange de pièces identiques près).
Peut-on trouver un puzzle unique de taille mx1, pour tout m ?
Et un puzzle non unique ?
Peut-on trouver un puzzle unique de taille mxn, pour tout m et tout n ?
Et un puzzle non unique ?

<u>Un puzzle est original</u> s'il n'a pas deux pièces identiques.
Quel est le nombre maximal de pièces que peut contenir un puzzle original ?
Quelles contraintes sur m et n pour pouvoir fabriquer un puzzle unique et original ?

Définissons les mots du sujet
- **<u>rotation :</u>** On note r, une rotation d'une pièce de 90° dans le sens anti trigonométrique. Donc, une rotation peut être notée : rk (avec k $\in$ N), revient à faire k rotations.



- <u>retournement :</u> inversion par symétrie axiale des côtés gauche et droit ou de haut en bas (retournement **h/b** ou **g/d**)

2. Réponses au sujet

2.1. Combien y a-t-il de pièces différentes si on n’autorise ni rotation, ni retournement ?

Il y a 4 côtés par pièce.
Pour chaque côté il y a 3 possibilités : l> ou l ou <l

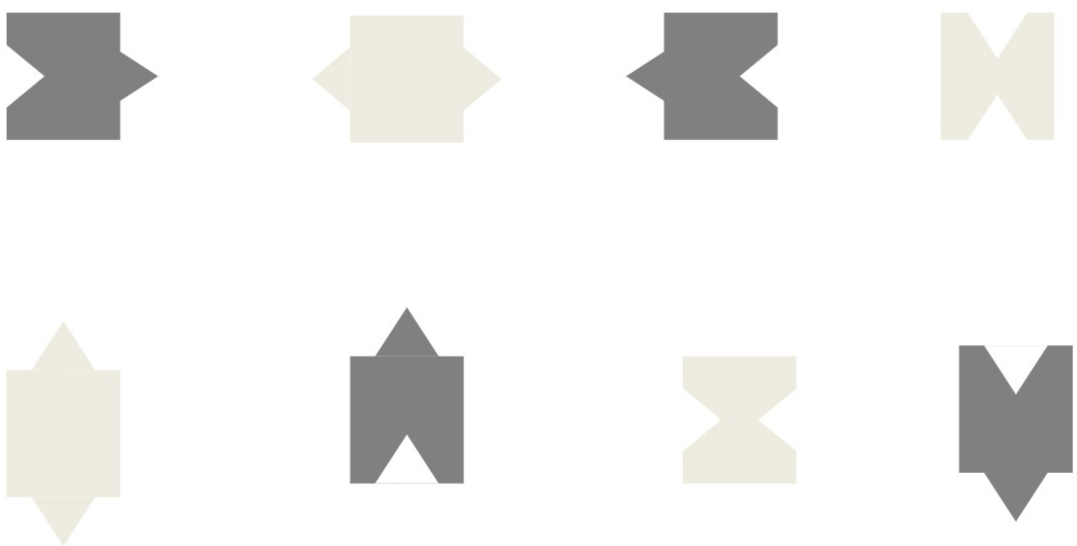
Donc le nombre total de pièces que l’on peut créer est de 3^4 = **81.**

Cependant, certaines pièces ne peuvent pas être utilisées dans un puzzle rectangulaire m x n (m>1 et n>1) : les pièces à **3 côtés plats**, les pièces à **2 côtés plats opposés**, la pièce à **4 côtés plats**

Or il existe : **8** pièces à trois côtés plats

8 pièces à deux côtés plats opposés :

1



1 pièce à quatre côtés plats

Cela fait donc 8+8+1 = **17** pièces que l'on ne peut pas utiliser dans un puzzle rectangulaire
81–17 = **64** → on pourra utiliser 64 pièces différentes

2.2. Quelques formules qui nous seront utiles

On a créé des formules qui vont nous permettre de calculer le nombre de pièces de chaque type (pièces à 2 côtés plats consécutifs…) dans un puzzle mxn (m>2 et n>2)

- nombre de pièces à 1 côté plat : **2(m-2)+2(n-2)**
- nombre de pièces à 2 côtés plats consécutifs : **4**
- nombre de pièces à 4 côtés modifiés : **(n-2)x(m-2)**

Les pièces à 1 côté plat sont les pièces du bord du puzzle (sauf angles).
Les pièces à 2 côtés plats consécutifs sont les pièces des angles.
Les pièces à 4 côtés modifiés sont les pièces dites « centrales », à l'intérieur du puzzle.

2.3. Même question si on autorise les rotations (et pas les retournements)

On a trouvé qu'on pouvait créer 81 pièces différentes lorsque l'on n'autorise ni les rotations ni les retournements. Mais seulement 64 étaient utilisables dans un puzzle.

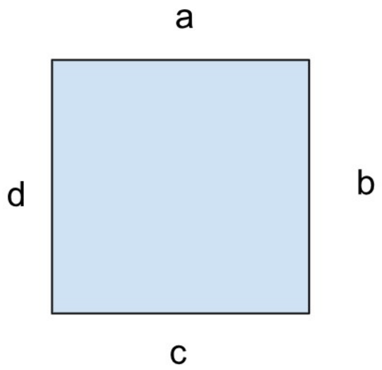
En autorisant les rotations, on s’attend à trouver un nombre de pièces utilisables inférieur à 64. En effet, plusieurs des pièces précédentes vont “correspondre” à 1 seule pièce si on autorise les rotations.

On conjecture donc qu’il suffira de diviser 80 par quatre et ajouter 1 (pour la pièce à tous les côtés plats) pour obtenir le nombre de pièces avec les rotations, donc 21 pièces au total.

On note r, une rotation d’une pièce de 90° dans le sens anti-trigonométrique. Donc, une rotation peut être notée : r^k (avec $k \in \mathbb{N}$), ce qui revient à faire k rotations.

Chaque côté a,b,c,d d’une pièce a pour valeur :

- soit 0 = pas de modification _
- soit 1 = triangle sortant I>
- soit -1 = triangle rentrant <I



On note $r^k(a)$, la valeur qu’on associera au côté a après k rotation(s).
Ainsi les évolutions du nombre a en fonction du nombre de rotations sont :

$r(a) = b$
$r^2(a) = c$
$r^3(a) = d$
$r^4(a) = a$ → revient à ne faire aucune rotation, donc toutes les quatre rotations, les faces reprennent leurs valeurs initiales.

Donc :
$10 \equiv 2$ → 10 est congru à 2 modulo 4 → [4] $r^{10}(a) = r^2(a) = c$
$8 \equiv 0[4]$ → $r^8(a) = a$
$19 \equiv 3[4]$ → $r^{19}(a) = r^3(a) = d$

Calculons maintenant le nombre de pièces avec les rotations :
Une pièce est définie par le quadruplet des valeurs pouvant être -1, 0 ou 1 (pour les côtés a,b,c,d).

Nous nous intéressons à l’**enchaînement** des valeurs des côtés, et non à l’**ordre** des valeurs.
En admettant les rotations :

(1,-1,1,-1) est la même pièce que (-1,1,-1,1) .

Dénombrement :

- Pièce à 4 côtés plats:

(0, 0, 0, 0)

- Pièces à 2 côtés plats opposés :

(0, 1, 0, 1)
(0, -1, 0, -1)
(0, -1, 0, 1)

- Pièces à 1 côté modifié :

(0, 0, 0, 1)
(0, 0, 0, -1)

- Pièces des angles :

(0, 1, 1, 0)
(0, 1, -1, 0)
(0, -1, 1, 0)
(0, -1, -1, 0)

- Pièces à 1 côté plat :

(0,1,1,1)
(0, -1, 1,1)
(0, -1, 1, -1)
(0, -1, -1, -1)
(0, 1, -1, 1)
(0, 1, 1, -1)
(0, 1, -1, -1)
(0, -1, -1, 1)

- Pièces à 4 côtés modifiés :

(1, 1, 1, 1)
(-1, -1, -1, -1)
(1, -1, -1, -1)
(-1, 1, 1, 1)
(-1, -1, 1, 1)
(-1, 1, -1, 1)

Donc la première conjecture n'est pas vérifiée, car on ne dénombre pas 21 pièces mais bien 24.

3. Les plus grands puzzles originaux

3.1. Le plus grand puzzle mx1

Le plus grand puzzle mx1 comporte 6 pièces car il existe 4 pièces à deux côtés plats opposés qui peuvent être placées dans le même puzzle. De plus, dans le plus grand puzzle mx1, on trouve également deux pièces à trois côtés plats pour les côtés, ce qui fait 6 pièces.

3.2. Quel est le plus grand puzzle mxn

Nous savons qu'il y a au total 16 pièces sans côtés plats, il nous faut donc un puzzle dont l'intérieur fait 4 x 4 pièces, et donc 6 x 6 pièces, donc 36 pièces . (1)

4. Conclusion

On sait maintenant qu'avec 64 pièces différentes possibles à utiliser sans rotation ni retournement on pourra faire notre plus grand puzzle mxn avec 36 pièces, un puzzle mx1 lui n'aura que 6 pièces si on veut qu'il soit original et si on autorise les rotations on trouvera 24 pièces possibles à utiliser dans le puzzle.
Malgré nos efforts de recherches, nous n'avons toujours pas trouvé la solution pour le puzzle à 36 pièces.

Note d'edition

(1) L'argument démontre que le plus grand puzzle original ne peut pas avoir plus de 36 pièces non que le plus grand puzzle original a 36 pièces.