

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

La bibliothèque désorganisée

Année 2024 – 2025

Colin Houdet, Thomas Schneider, élèves de première

Établissement : Ecole Européenne de Karlsruhe

Enseignant-es: François Frey, Nathalie Brassat

Chercheur: Louis Garénaux, Karlsruhe Institute of Technology.

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Dans notre sujet, « La bibliothèque Désorganisée » Paul, un bibliothécaire, doit chercher un livre parmi plusieurs piles de livres. Cependant, Paul peut seulement lire la couverture du livre au-dessus d'une pile, et il ne peut pas lire les titres des livres en lisant les tranches des livres parmi ses piles. Paul ne connaît pas l'emplacement du livre parmi les piles. Pour déplacer les livres il peut seulement déplacer un livre à la fois et uniquement un livre qui se trouve sur le dessus d'une pile pour le placer au-dessus d'une autre pile. La table sur laquelle se trouvent les livres est aussi trop petite pour créer une pile en plus. Le but du problème est d'estimer de combien de temps Paul aura besoin pour trouver le livre en question. Nous notons n le nombre de piles, nous numérotions les piles de 1 à n et notons P_n le nombre de livres sur la pile n . Nous choisissons de toujours numéroter 1, la plus petite pile ; le nombre de livres qu'elle comporte est P_1 . Paul a besoin de 30 secondes pour déplacer un livre.

1.2. Résultats

Nous avons trouvé pour ce problème une formule permettant de calculer le nombre maximal de fois que Paul devra bouger un livre pour trouver le livre recherché :

$$\text{Nombre de mouvements} = P_1 - (n + 1) + \sum_{i=1}^n P_i$$

avec P_1 le nombre de livres sur la plus petite pile et n le nombre de piles.

Nous avons aussi trouvé une formule permettant de trouver le nombre de mouvements maximum lorsque toutes les piles ont le même nombre de livres :

$$(n + 1)(P_n - 1).$$

Ainsi, pour calculer le temps nécessaire, il suffit de multiplier le nombre de mouvements par 30 secondes. Pour que ces formules fonctionnent, il faut suivre la méthode optimale pour découvrir tous les livres, qui sera expliquée plus tard.

De plus, en développant la formule $(n + 1)(P_n - 1)$, nous trouvons :

3. Cas général

3.1. Meilleure stratégie

Dans le cas général, nous avons déterminé, en nous basant sur la stratégie du cas spécial, que la meilleure stratégie pour découvrir la couverture de chaque livre le plus rapidement possible est de commencer par vider la plus petite pile sur n'importe quelle autre pile, puis de vider tous les livres sur la première pile. On ne déplace toujours pas les livres au pied des piles, car notre but est seulement de voir tous les livres et nous pouvons voir le livre au pied de chaque pile sans le déplacer. Il est nécessaire de vider la première pile en premier pour optimiser les mouvements car la pile déplacée en premier est celle qui est déplacée deux fois, donc compte pour plus que les autres piles.

3.2. Formule

Nous avons donc déterminé que la formule donnant le nombre de mouvements pour pouvoir voir tous les livres est :

$$\text{Nombre de mouvements} = P_1 - (n + 1) + \sum_{i=1}^n P_i.$$

Pour appliquer cette formule, il faut bien sûr suivre la stratégie expliquée auparavant. Dans la formule, P_1 représente le nombre de livres sur la plus petite pile, donc la pile déplacée deux fois. Ensuite, le terme somme $\sum_{i=1}^n P_i$ représente tous les livres de toutes les piles, qui sont tous déplacés lorsqu'on vide sur la première pile. Enfin le terme $-(n + 1)$ est pour les livres au pied de chaque pile, qui ne sont pas déplacés car il n'y a rien à voir en dessous d'eux.

On peut démontrer cette formule en passant par le cas où nous avons assez de place pour créer une pile supplémentaire. (4) Dans ce cas-là, le nombre de mouvements serait tout simplement la totalité des livres moins n , les livres en bas de chaque pile. Donc la formule serait :

$$\text{nombre de mouvements} = \sum_{i=1}^n P_i - n.$$

Mais dans le problème nous ne pouvons pas créer de nouvelles piles, donc il faut également prendre en compte le nombre de mouvements nécessaires à vider une première pile, qui est $P_1 - 1$. En additionnant les deux formules, on retrouve bien :

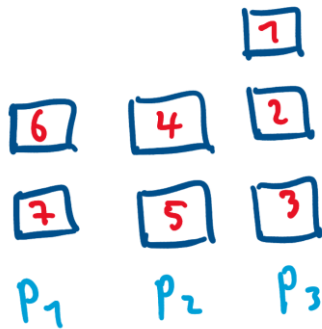
$$\text{Nombre de mouvements} = P_1 - (n + 1) + \sum_{i=1}^n P_i.$$

4. Optimisation de la stratégie

Nous avons par la suite réalisé qu'en plus d'optimiser le nombre maximal de mouvements, il est également possible d'optimiser le nombre moyen de mouvements pour trouver le livre, vu que le but n'est finalement pas de voir tous les livres, mais de trouver un livre spécifique. Pour cela, nous avons gardé la stratégie précédente du cas général et avons ajouté des contraintes à celle-ci. (5)

Nous nous sommes aperçus que lorsque nous suivons la stratégie générale, il est possible de tomber sur le livre recherché après chaque mouvement, sauf ceux qui servent à déplacer la pile P_1 pour la deuxième fois. En effet, tous les livres de la pile P_1 ainsi que le livre sur lequel cette pile a été déplacée ont déjà été vus. Donc en repoussant au plus tard le deuxième déplacement de la pile P_1 , nous pouvons augmenter la probabilité de tomber sur le livre recherché plus tôt. Pour cela, il suffit de vider la pile P_1 sur la pile P_2 , puis de vider toutes les autres piles avant de revenir déplacer la pile P_1 et vider la pile P_2 .

Pour arriver à cette conclusion, nous avons commencé par faire des essais sur une configuration de trois piles, avec deux piles de 2 livres et une de 3 livres configurées comme montré ci-dessous :



Pour l'essai, nous avons demandé à une personne de chercher un livre, choisi au hasard, en suivant soit la stratégie inverse de celle optimisée, c'est à dire en faisant le deuxième déplacement de la pile P_1 le plus tôt possible, soit la stratégie optimisée. Si la personne suit la stratégie inverse de celle optimisée, elle commence par vider la P_1 sur n'importe quelle pile, puis redéplacer la P_1 avant de vider le reste des piles dans l'ordre de son choix sur la P_1 . Nos résultats figurent dans le tableau ci-dessous :

(6)

3 piles, P1=2, P2=2, P3=3 (essais)	Inverse	Moyenne	Optimisée	Moyenne
1	0	0	0	0
2	4,4,4,4,4	4	2,2,2,2,2	2
3	4,4,4,5,5	4.4	3,3,3,3,3	3
4	0	0	0	0
5	5,5,5,3,3	4.2	5,5,5,5,5	5
6	0	0	0	0
7	1,1,1,1,1	1	1,1,1,1,1	1
		1.942857	1.571429	0.371429

Nous avons donc trouvé que, en moyenne (7), la stratégie inverse de celle optimisée a pris environ 1.94 mouvements pour trouver le livre, alors que la stratégie optimisée a pris 1.57 mouvements, ce qui fait donc environ 0.37 mouvements de moins, et donc 11 secondes de gagnées. Le nombre d'essais est cependant faible, ce qui est pourquoi nous avons continué en trouvant les valeurs théoriques possibles dans ce scenario.

À la suite des essais, nous avons remarqué que chaque livre est découvert après un nombre de mouvements qui est presque fixe, nous avons donc décidé de chercher les valeurs théoriques du nombre de mouvements nécessaires pour trouver chaque livre. Nos résultats sont dans le tableau ci-dessous, présenté de la même façon que pour les essais. (8)

3 piles, P1=2, P2=2, P3=3 (valeurs théoriques)	Sans	Moyenne	Avec	Moyenne
1	0	0	0	0
2	3,4	3.5	2	2
3	4,5,5	4.666667	3	3
4	0	0	0	0
5	3,4,5	4	5	5
6	0	0	0	0
7	1	1	1	1
		1.880952	1.571429	0.309524

Nous avons donc une baisse du nombre moyen de mouvements de 0.31 mouvements en moyenne, ce qui fait donc 9 secondes de gagnées en moyenne. Cette valeur diffère légèrement des valeurs expérimentales car celles-ci ont été faites à petite échelle, mais à une plus grande échelle, les valeurs expérimentales devraient aussi se rapprocher de 9 secondes.

5. Conclusion

En conclusion, nous avons premièrement trouvé comment optimiser le temps nécessaire en diminuant au maximum le nombre de mouvements pour trouver un livre.

Nous avons ensuite trouvé un moyen de calculer le nombre maximal de mouvements et donc, par proportionnalité, le temps maximal nécessaire pour trouver quelque livre arrangé dans des piles.

Nous avons par la suite approfondi le problème en optimisant le nombre moyen de mouvements nécessaires pour trouver un livre, ce qui diminue donc le temps moyen par 30 secondes pour chaque mouvement en moins.

Notes d'édition

(1) À propos de l'usage des expressions « vider une pile » et « déplacer une pile » : bien noter que le livre le plus en bas ne bouge pas, une pile n'est en fait jamais entièrement vidée ou déplacée.

(2) Il est écrit que l'on déplace les livres sur la pile que l'on vient de vider. En toute rigueur, cela ne correspond pas au schéma car les actions 5 et 6 font poser des livres sur une autre pile que celle qui vient d'être vidée (celle de droite). Mais cela ne joue aucun rôle, l'algorithme reste valable.

(3) Plutôt « Explication de la formule du 2.1 »

(4) Le fait de pouvoir créer une nouvelle pile ne justifie pas le calcul du nombre de mouvements car cela modifie le problème initial.

(5) Cette partie considère le cas de figure où les piles sont toujours vidées dès qu'un premier livre y est retiré, mais a priori il serait également possible en vidant une première pile de disposer les livres dans des piles différentes afin de réduire la hauteur maximale des piles, ce qui réduirait le nombre de mouvements nécessaires pour atteindre des livres qui n'ont pas encore été regardés ; ce n'est pas discuté.

(6) Il y a 5 recherches en tout : pour la stratégie inverse, les 3 premières tentatives sont les mêmes, elles correspondent à un cas de figure différent des deux dernières (qui sont identiques).

(7) La stratégie « optimisée » est bien « optimisée en moyenne » mais pas optimale en toute circonstance, car on peut voir que dans le cas où le livre à trouver est le numéro 5, ce n'est pas cette stratégie qui est la plus rapide.

(8) Le nombre de mouvements est fixe pour la stratégie optimisée car l'algorithme est déterminé, il est variable pour la stratégie inverse car il contient une part d'aléatoire cachée dans l'instruction « vider sur n'importe quelle pile » qui laisse plusieurs possibilités qui ne sont pas équitables.