

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Courte Paille

Année 2024 – 2025

Nada MEFTAH, Jannette MEFTAH, élèves de classe de seconde et terminale

louise LEMOUSSU ,Inès GAUTIER ,Ambre VAUCHEL, élève de classe de 4a et 4b

Établissement(s) : Lycée Raynouard (Brignoles - Var),

Collège Irène et Frédéric Joliot-Curie (Carqueiranne- Var)

Enseignant-e(s) : Mourau Nelly, Berger Antoine, Guicheteau Denis, Dumont Maéva, Jouet Anaëlle

Chercheur·Chercheuse(s) : Thierry Champion laboratoire imath. Frédéric Havet - INRIA

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Deux personnes ont chacune une paille de la même taille. Ils la coupent en 3 morceaux (de taille entière). Les morceaux sont rangés par ordre croissant. Les deux personnes comparent leurs morceaux. Si un morceau est plus grand, la personne ayant ce morceau gagne un point. Celui qui a le plus de points gagne la partie.

PROBLÉMATIQUE: Nous allons nous demander quel est la découpe la plus adéquate pour optimiser nos chances de gagner, éviter de perdre, enfin est-ce qu'il existe une découpe qui permet de gagner le plus souvent possible

1.2. Résultats

Pour une paille de taille n coupée en 3.

Découpage gagnant : Formule : $b = c \simeq \frac{n}{3}$ (découpage presque équitable)

$$a = n - 2b$$
$$[c ; b ; a]$$

Découpage perdant : Formule : $[1 ; 1 ; n-2]$

2. Exemple

Étape 1 : Choix de la longueur des pailles.

Exemple :

Paille de longueur 7 :



Étape 2 : Découpage des pailles

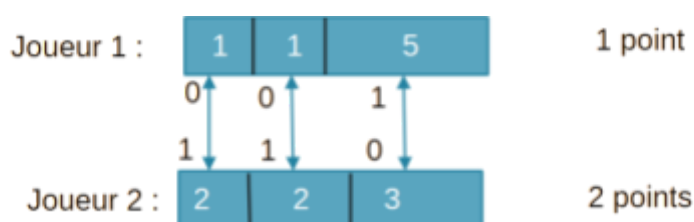
Exemple avec des pailles de longueur 8 :

Ce que l'on peut faire : 

Ce que l'on ne peut pas faire :  (on doit avoir un ordre croissant)

Étape 3 : Comparaison des morceaux

Exemple :

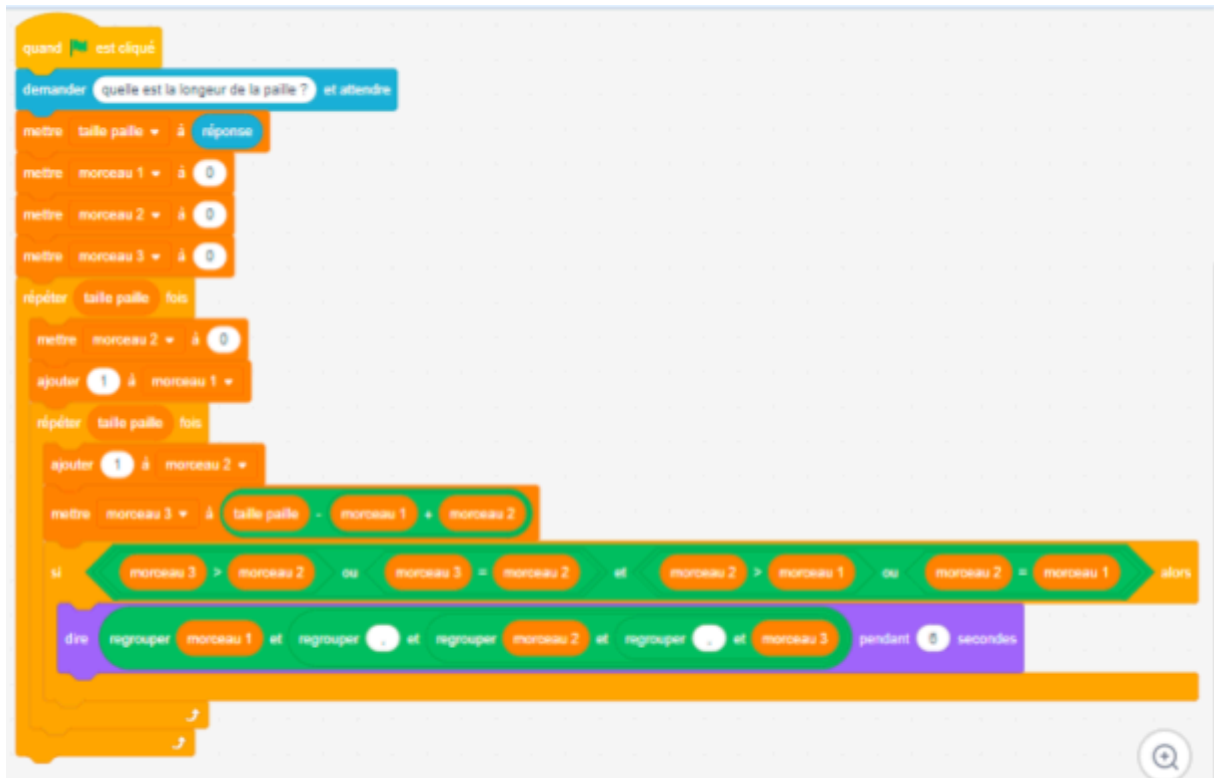


Le joueur 2 gagne.

2.1. Recherche collègue

Nous avons mis au point un programme sur Scratch, il va nous permettre de trouver toutes les découpes possibles et dans l'ordre croissant, il suffit juste de rentrer la longueur de votre choix, ce sera la variable "taille paille". On met le morceau 1 à 1 puis le morceau 2 à 1 aussi et on calcule la taille du morceau 3 (taille paille - 2) on obtient un premier découpage. Ensuite le programme va augmenter la taille du morceau 2 puis il va faire la même chose jusqu'à ce qu'il ne puisse plus le faire

dans l'ordre croissant donc il va augmenter le morceau 1 et il recommence le programme on obtient donc tous les découpages possibles.



Nous avons regroupé les résultats dans un tableau.

	Taille 3	Taille 4	Taille 5	Taille 6	Taille 7	Taille 8	Taille 9
1	1/1/1	1/1/2	1/1/3	1/1/4	1/1/5	1/1/6	1/1/7
2			1/2/2	1/2/3	1/2/4	1/2/5	1/2/6
3				2/2/2	1/3/3	1/3/4	1/3/5
4					2/2/3	2/2/4	1/4/4
5						2/3/3	2/2/5
6							2/3/4
7							3/3/3
Qui gagne le plus	1/1/1	1/1/2	1/1/3 1/2/2	2/2/2	2/2/3	2/3/3	3/3/3
Qui perd le moins	1/1/1	1/1/2	1/1/3 1/2/2	2/2/2	2/2/3	2/3/3	2/3/4

3. Recherches lycée

3.1. Création de l'algorithme

Nous avons créé un algorithme capable de donner toutes les découpes possibles d'un nombre en 3.

```
Script
1 import numpy as np
2 #construit un tableau vide avec 3 colonnes
3 tableau=np.empty((0,3),np.int8)
4
5 #longueur de la paille
6 n=7
7
8 #longueur des morceaux de paille : a, b et c
9 a=1
10
11 while a<=n//3:
12     b=n-1
13     while b>=a :
14         c=n-a-b
15         if c>=b:
16             tableau=np.append(tableau,[[a,b,c]],axis=0)
17             b=b-1
18         a=a+1
19 print("il y a ",len(tableau),"possibilités :\n",tableau)
20
21 tableauVictoire=np.zeros(len(tableau),np.int8)
22 tableauPerdu=np.zeros(len(tableau),np.int8)
23 #pour chaque découpage on va tester avec les autres
24 numero=0
25 for element in tableau:
26
27     for versus in tableau:
28         victoire=0
```

on construit un tableau vide

on indique la taille de la paille voulue

on commence avec une découpe de 1

comme on a trois morceaux, le plus petit doit forcément être plus petit que $n/3$.

Ensuite on fait varier b entre a et n et on regarde si la découpe est possible ($a \leq b \leq c$).

Si c'est le cas, on rajoute la découpe au tableau.

```
il y a 4 possibilités :
[[1 3 3]
 [1 2 4]
 [1 1 5]
 [2 2 3]]
[0 0 0 1]
[0 0 1 0]
>>>
```

Programme:

<https://capytale2.ac-paris.fr/p/basthon/c/?kernel=python3-legacy&mode=assignment&id=4595332>

Nous avons ensuite noté pour chaque nombre, quel est le meilleur et le pire découpage possible. Nous avons retranscrit ces résultats dans des tableaux, dans le but de noter certaines similitudes. Après analyse, nous avons trouvé des points communs entre les découpes. Nous avons ensuite créé des formules à partir de ces résultats. Enfin, nous avons déduit une découpe optimale de la paille.

3.2. Les perdants systématiques

LES PLUS GRANDS PERDANTS	
N = 11 [1 1 9]	N = 12 [1 1 10]
N = 13 [1 1 11]	N = 14 [1 1 12]
N = 15 [1 1 13]	N = 16 [1 1 14]
N = 17 [1 1 15]	N = 18 [1 1 16]
N = 19 [1 1 17]	N = 20 [1 1 18]
N = 21 [1 1 19]	N = 22 [1 1 20]
N = 23 [1 1 21]	N = 24 [1 1 22]
N = 25 [1 1 23]	N = 26 [1 1 24]
N = 27 [1 1 25]	N = 28 [1 1 26]
N = 29 [1 1 27]	N = 30 [1 1 28]
N = 31 [1 1 29]	N = 32 [1 1 30]
N = 33 [1 1 31]	N = 34 [1 1 32]
N = 35 [1 1 33]	N = 36 [1 1 34]
N = 37 [1 1 35]	N = 38 [1 1 36]
N = 39 [2 18 19]	

Liste des perdants de 11 à 39

Explications:

Dans ce tableau sont retranscrits les découpages perdant le plus de duels.

La couleur orange nous indique la répétition du chiffre 1.

A partir de ce tableau, nous avons créé une formule pour être capable de retrouver le découpage le moins avantageux.

Pour cette étude, nous avons analysé les nombres de 11 à 39, la formule trouvée marche jusqu'à 38.

Formule: [1 ; 1 ; N-2]

Pour trouver la pire découpe, il suffit de prendre la longueur de la paille ex: 15 unités, et ensuite soustraire 2.

Ainsi nous obtenons la taille d'un des trois morceaux.

Les deux autres seront de la même taille : 1 unité.

Exemple pour 15:

- $15-2=13$
- 1 pour les deux autres morceaux
- Soit: [1 ; 1 ; 13]

3.3. Trouver la formule gagnante:

Nous avons essayé de trouver une formule pour déterminer le gagnant (celui qui gagne le plus).

GAGNANT CONFONDU

N = 15 [555]	N = 32 [8 12 12]
N = 16 [466]	N = 33 [7 13 13]
N = 17 [566]	N = 34 [8 13 13]
N = 18 [477]	N = 35 [7 14 14]
N = 19 [577]	N = 36 [8 14 14]
N = 20 [677]	N = 37 [9 14 14]
N = 21 [588]	N = 38 [10 10 14]
N = 22 [688]	N = 39 [9 15 15]
N = 23 [599]	[10 18 2]
N = 24 [699]	N = 40 [10 15 15]
N = 25 [799]	N = 41 [11 15 15]
N = 26 [899]	N = 42 [10 16 16]
N = 27 [999]	N = 43 [11 16 16]
N = 28 [6 11 11]	N = 44 [10 17 17]
N = 29 [7 11 11]	N = 45 [11 17 17]
N = 30 [8 11 11]	N = 46 [12 17 17]
N = 31 [7 12 12]	N = 47 [11 18 18]

FORMULE: $b = c \simeq \frac{n}{3} (\text{Arrondi})^*$
 $a = n - 2b$

Explication:

- On note a; b et c les trois morceaux de la paille
- La taille du morceau b et c sont les mêmes.
- De plus, elles ont pour valeur une valeur proche de la taille de la paille divisée par 3 (voir tableau ci-dessous)
- Ensuite pour avoir la valeur du dernier morceau:
On prend le double de la valeur du nombre b, que l'on soustrait au nombre d'unités de la paille.

Application avec 18:

$$18:3=6$$

On prend l'entier suivant. Donc 7

[Les deux premiers morceaux de la paille feront 7 unités]

$$18 - 2 \times 7 = 5$$

[Le 3e morceau fera 5 unités]

*précisions sur les arrondis:

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$n/3$	5	5,3	5,7	6	6,3	6,7	7	7,3	7,7	8
découpage	5	6	6	7	7	7	8	8	9	9

n	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
$n/3$	8,3	8,7	9	9,3	9,7	10	10,3	10,7	11	11,3
découpage	9	9	9	11	11	11	12	12	13	13

n	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
$n/3$	11,7	12	12,3	12,7	13	13,3	13,7	14	14,3	14,7
découpage	14	14	14	x	15	15	15	16	16	17

On s'aperçoit que plus la taille augmente, plus l'écart entre le tiers de la paille et le découpage augmente. Nous n'avons pas réussi à expliquer cet écart.

3.4. Etude des gagnants

Après analyse des résultats de l'algorithme, nous en avons déduit que pour avoir une découpe optimale, lors d'un découpage en 3, on a une découpe plus ou moins équilibrée, en prenant environ le tiers de la taille de la paille (attention aux nombres décimaux).

4. Conclusion

Le découpage qui gagne le plus de parties semble toujours être celui dont les 3 morceaux sont les plus équilibrés. Cependant, celui qui gagne le plus n'est pas forcément celui qui perd le moins. Il faut donc adapter sa stratégie en fonction de son but. Cependant, il est important d'ajouter que gagner un duel rapporte un point dans notre étude.

Il serait donc possible de changer les règles du jeu, où par exemple gagner vaudrait deux points. Nous n'avons pas eu le temps de traiter ce cas.