Cet article est basé sur un travail de recherche fait au sein de l'Atelier MATh.en.JEANS à destination des étudiants en première année de licence.

La Vasque Olympique de Paris

Année 2024-2025

Deniz Demirer et Li You Toh, Licence 1

Établissement : Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Saclay
Chercheur : Pierre Pansu, Université Paris-Saclay

1. Introduction

1.1. Sujet

La vasque olympique de Paris est suspendue à une sphère remplie d'helium, d'un diamètre de 22 m (Figure 1). Sa moitié supérieure est garnie d'une résille de corde, c'est-à-dire, d'un ensemble de bouts de corde noués ensemble (comme un filet de pêche). Cette résille a la propriété suivante : les mailles formées ne laissent pas passer un ballon de foot (de diamètre 22 cm). On s'intéresse à la longueur de corde nécessaire pour réaliser la résille. La résille de la vasque semble diviser l'hémisphère approximativement en losanges, mais on pourrait s'y prendre autrement. Peut-on faire nettement mieux, i.e. proposer un autre modèle de résille qui utiliserait beaucoup moins de corde, tout en respectant la condition imposée par le ballon de foot ?

FIGURE 1 – La vasque olympique

2. Modèle mathématique pour décrire la résille originelle

La résille originelle semble recouvrir la sphère en formant des losanges. Pour qu'elle respecte la clause du ballon de foot, on va considérer qu'il faut que tout point de l'hémisphère se trouve à distance au plus 11 cm d'un point de la résille. Essayons d'approximer la longueur de corde nécessaire pour cette résille en la reconstruisant.

Nous rappelons qu'un grand cercle sur une sphère est l'intersection entre cette sphère et un plan passant par le centre de la sphère.

Soit O le centre de la sphère de rayon R. On va couper la sphère par des plans parallèles. Pour ceci, on place $2n$ points espacés de x le long de la partie supérieure d'un grand cercle (Figure 2-a). On considère maintenant les plans passant par un point sur deux, tels qu'ils soient parallèles entre eux. Finalement, on place des bouts de cordes sur les cercles qui sont formés par l'intersection des plans et de la sphère. On note respectivement $l_1, l_2, \ldots, l_n$ le périmètre du n-ième cercle (Figure 2-b).

Posons maintenant A_1, un point quelconque sur le cercle de périmètre l_1. Nommons B_1 le centre de ce cercle. Nous posons alors $\theta_1 := \widehat{A_1OB_1}$ (Figure 2-c). On a ainsi

$$\theta_1 = \frac{x}{R}.$$

Soit r_1 le rayon de l_1,

$$r_1 = R\sin(\theta_1) = R\sin(\frac{x}{R})$$

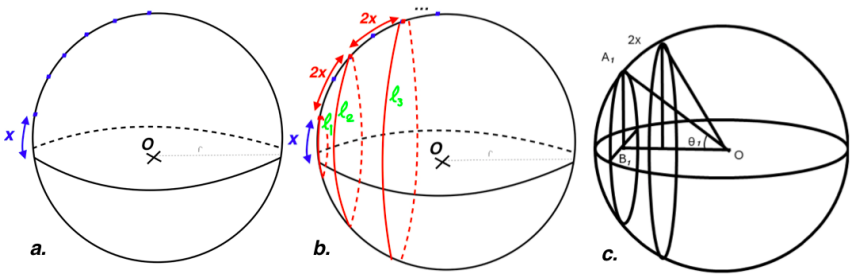

FIGURE 2 – La reconstruction de la résille originelle

Alors,

$$l_1 = 2\pi r_1 = 2\pi R\sin(\frac{x}{R})$$

On peut continuer de la même manière pour calculer les périmètres des cercles suivants :

$$l_2 = 2\pi r_2 = 2\pi R\sin(\frac{3x}{R}),$$

$$l_3 = 2\pi r_3 = 2\pi R\sin(\frac{5x}{R}),$$

$$\vdots$$

On constate que $\theta_n = (2n-1)\theta_1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. On peut ainsi écrire le terme général de l_n :

$$l_n = 2\pi R\sin((2n-1)\frac{x}{R}), n \in \mathbb{N}^*$$

On fait la somme de la longueur de chaque corde. La longueur de corde nécessaire pour fabriquer des tranches espacées de $2x$ sur la sphère entière est donc

$$L = \sum_{k=1}^{m} l_k = 2\sum_{k=1}^{m} \pi R\sin((2k-1)\frac{x}{R}),$$

avec $m \in \mathbb{N}^*$ (le nombre de cercles espacés de $2x$ sur un demi-grand cercle à la partie supérieure). Or $\theta_m < \pi$ donc $\theta_m = (2m-1)\theta_1 = (2m-1)\frac{x}{R} < \pi$. Donc, on a l'expression $m < \frac{\pi R}{2x} + \frac{1}{2}$. On prend donc $m = \lfloor \frac{\pi R}{2x} + \frac{1}{2} \rfloor$.

Pour finaliser la construction de la résille, tournons la sphère découpée en tranches de 45 degrès autour d'un axe horizontal, dans un sens et dans l'autre, pour ajouter des bouts de cordes qui recoupent la sphère en tranches. La superposition de ces deux séries de tranches va doubler la longueur de corde utilisée et former des losanges sur la surface de la sphère (Figure 3). Il suffit maintenant de considérer

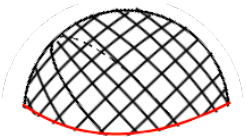

FIGURE 3 – La résille originelle

un seul hémisphère de la sphère pour fabriquer cette résille, ce qui divise la longueur de corde utilisée par deux. Enfin, on ajoute un bout de corde tout au long de l'équateur.

Par application numérique ($x = 0,11$ m, $R = 11$ m), on trouve que $m = \lfloor \frac{\pi R}{2x} + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{1100\pi}{2 \cdot 11)} + \frac{1}{2} \rfloor = 157$ et la somme correspondante est $L = \sum_{k=1}^{m} l_k = 2\sum_{k=1}^{157} 11\pi \sin(\frac{(2k-1)\cdot 0,11}{11}) \approx 6911,61$ m. La longueur totale de corde utilisée est donc approximativement,

$$L_T = L + 2\pi R \approx 6980,73 \text{ m}.$$

3. Idées d'amélioration

Nous allons maintenant voir s'il est possible d'utiliser moins de corde pour fabriquer une résille qui respecte la clause du ballon de foot.

3.1. Les tranches

Nous coupons la sphère en tranches de la même manière mais cette fois en laissant 22 cm entre chaque tranche. Nous mettons ensuite un bout de corde sur un grand cercle (Figure 4). On peut donc s'arrêter à la construction de la première série de tranches verticales lors de la reproduction de la résille originelle. Comme nous sommes intéressés par la partie supérieure de la sphère, on divise la longueur obtenue à cette étape en deux, on ajoute éventuellement un bout de corde sur l'équateur et on voit que longueur totale approximative de corde utilisée dans ce cas est 3524,92 m.

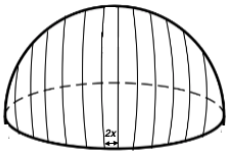

FIGURE 4 – Les tranches

3.2. Les méridiens

On peut aussi placer des cordes sur des grands cercles sécants, autrement dit, sur les méridiens, en espaçant de 22 cm leur pied le long de l'équateur, pour respecter les conditions imposées (Figure 5). Le nombre de grands cercles considérés est égal à $\lfloor \frac{2\pi R/2}{2x} \rfloor = 157$. Il faut donc multiplier par ce nombre le demi-périmètre d'un grand cercle, soit $\frac{2\pi R}{2} = \pi R$. Par application numérique, on obtient une longueur de corde égale à 5425,53 m.

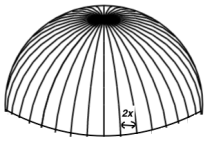

FIGURE 5 – Les méridiens

Nous avons cependant remarqué qu'il y a une manière d'utiliser beaucoup moins de corde.

4. Une longueur de corde arbitrairement petite ?

En effet, il suffit de supposer qu'on munit la sphère de bouts de cordes arbitrairement petits tout en respectant la clause du ballon de foot (Figure 6).

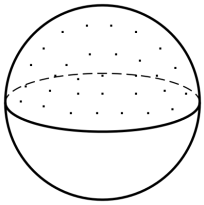

FIGURE 6 – Une longueur de corde arbitrairement petite

Pour rendre ce raisonnement invalide, il faut ajouter des hypothèses, et donc modifier notre problème.

Problème précisé : On suppose désormais que les cordes divisent la demi-sphère en triangles ayant un cercle inscrit de rayon au plus 11 cm.

5. Sur le plan euclidien, une question auxiliaire

La question suivante nous est venue à l'esprit, même si la réponse ne sert pas pour le problème précisé.

Question auxiliaire : *Quel triangle, de rayon inscrit donné, a un périmètre minimum ?*

On se place sur le plan euclidien. Avec les formules de trigonométrie, on peut exprimer le périmètre et l'aire du triangle en fonction du rayon du cercle inscrit, et de 3 angles au centre de ce cercle vérifiant $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ (Figure 7) :

$$P_{\triangle} = 2r(\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma))$$
$$A_{\triangle} = r^2(\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma))$$

On veut minimiser $\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)$. Pour cela, on propose deux idées différentes.

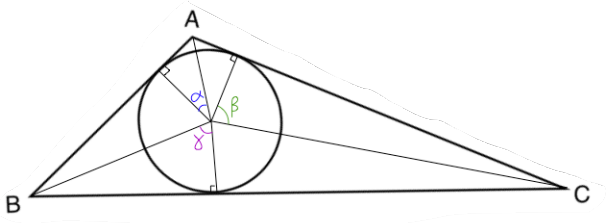

FIGURE 7 – Un triangle euclidien avec un cercle inscrit

5.1. Un algorithme de réduction de la somme des tangentes

Supposons qu'on a trois angles égaux, et qu'on veut varier ces angles en préservant leur somme. Une manière de faire varier les valeurs de ces angles est d'en fixer un, augmenter un autre, et diminuer le dernier d'autant qu'on a augmenté l'autre pour préserver la somme. On va démontrer que cette opération augmente la somme des trois tangentes.

Proposition. *Pour x et a dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ tels que $a + x < \frac{\pi}{2}$,*

$$\tan(x-a) + \tan(x+a) \geq 2\tan(x)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\tan(x-a) + \tan(x+a) &= \frac{\tan(x)+\tan(a)}{1-\tan(x)\tan(a)} + \frac{\tan(x)-\tan(a)}{1+\tan(x)\tan(a)} \\ &= 2\tan(x)\left(\frac{1+2\tan^2(a)}{1-\tan^2(a)\tan^2(x)}\right) \geq 2\tan(x).\end{aligned}$$

puisque $1+\tan(x)\tan(a) > 0$, et $1-\tan(x)\tan(a) > 0 \iff \tan(x)\tan(a) < 1 \iff \tan(x) < \frac{1}{\tan(a)} = \cot(a) = \tan(\frac{\pi}{2} - a) \iff x < \frac{\pi}{2} - a$. □

Appliquons ce raisonnement à nos trois angles α, β, γ. Le but est de montrer qu'on peut partir de trois angles différents, et réduire la valeur de la somme des tangentes en remplaçant les angles par leur moyenne. On va remarquer qu'en itérant l'opération, les valeurs de nos trois angles vont tendre l'une vers l'autre, ce qui va nous montrer que la somme des tangentes est minimale lorsque les angles sont égaux.

On a

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} + \gamma = \pi.$$

On remarque que, en spécialisant la proposition à $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $a = \frac{-\alpha+\beta}{2}$, puis en ajoutant $\tan(\gamma)$ aux deux cotés, on obtient :

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) \geq 2\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \tan(\gamma).$$

Puis, de même, en spécialisant la proposition à $x = \frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma}{2}$ et $a = \frac{-\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma}{2}$ et en ajoutant $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ aux deux cotés, on obtient :

$$2\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \tan(\gamma) \geq \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 2\tan\left(\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma}{2}\right).$$

À chaque étape, on a trois angles α, β, et γ, dont deux angles différents. Pour aller d'une étape à la suivante, on calcule une moyenne entre deux angles. On alterne entre deux manières de faire cela :

La première manière, qu'on fera une étape sur deux, est de faire la moyenne de α et de β, et de remplacer les valeurs de α et de β par cette moyenne. L'angle γ ne change pas, et on obtient ainsi nos 3 nouveaux angles.

La deuxième méthode pour passer d'une étape à la suivante, est de calculer la moyenne de β et de γ, et de remplacer les valeurs de β et de γ par cette moyenne. L'angle α ne change pas, et on obtient ainsi nos 3 nouveaux angles.

On notera α_n, β_n et γ_n les valeurs des angles au bout de n opérations. En effectuant les étapes, on remarque qu'on peut exprimer les angles de la façon qui suit :

$$\begin{aligned}\alpha_{2n+1} &= \beta_{2n+1} = \frac{\alpha_{2n}+\beta_{2n}}{2} \\ \gamma_{2n+1} &= \gamma_{2n} \\ \alpha_{2n+2} &= \alpha_{2n+1} \\ \beta_{2n+2} &= \gamma_{2n+2} = \frac{\beta_{2n+1}+\gamma_{2n+1}}{2}\end{aligned}$$

On peut donc poser deux suites $u_n := \beta_{2n+1}$ et $v_n := \gamma_{2n+1}$. On remarque qu'elles satisfont une relation de récurrence,

$$(u_n) = \begin{cases} u_0 = \beta_1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad (v_n) = \begin{cases} v_0 = \gamma_1 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}.$$

On peut écrire ces suites sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AS_n, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad S_n = \begin{pmatrix} v_n \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_n = A^n S_0, \quad S_0 = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Calculons les valeurs propres λ, racines du polynôme

$$\det(A - \lambda I) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{3}{4} - \lambda\right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4}.$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}}{2} \iff \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}.$$

Pour $\lambda = 1$,

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

On obtient $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \implies x = y$. Un vecteur propre associé est donc :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = \frac{1}{4}$,

$$(A - \frac{1}{4}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

On obtient $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 0 \iff x = -2y$. Un vecteur propre associé est donc :

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la méthode du pivot de Gauss, on trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

et

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} A^n S_0 = \lim_{n\to\infty} PD^n P^{-1} S_0 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} S_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\beta + \frac{2}{3}\gamma \\ \frac{1}{3}\beta + \frac{2}{3}\gamma \end{pmatrix}, \quad \text{puisque } \frac{1}{4} < 1.$$

Cela montre que les suites (u_n) et (v_n) deviennent asymptotiquement égales (elles convergent vers la même limite).

On a donc montré qu'en égalisant la valeur des angles deux par deux étape par étape, la somme des tangentes diminue, on se rapproche de plus en plus du cas où les trois angles sont égaux, et la somme des tangentes est minimale dans ce cas là. Ainsi, comme $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ à chaque étape, on a à la limite $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. On conclut que le triangle ayant le périmètre minimal est le triangle équilatéral.

Passons à la deuxième méthode, plus concise.

5.2. L'inégalité arithmético-géométrique

L'idée ici est de se servir de l'inégalité arithmético-géométrique qui établit un lien entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique :

Pour tous réels positifs x_i, $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad \textit{l'égalité se produisant si et seulement si les } x_i \textit{ sont égaux.}$$

On va profiter du fait que la somme de nos trois angles est fixée. On remarque que cette donnée permet d'affirmer quelque chose d'assez intéressant sur les tangentes des trois angles.

Proposition. *Soient trois angles α, β et γ dans $[0, \frac{\pi}{2}[$.*
Lorsque $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $tan(\alpha) + tan(\beta) + tan(\gamma) = tan(\alpha) \cdot tan(\beta) \cdot tan(\gamma)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\tan((\alpha+\beta)+\gamma) &= \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\gamma)} \\
0 &= \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\gamma)} \quad \text{(puisque } tan(\alpha+\beta+\gamma) = tan(\pi) = 0\text{)} \\
0 &= \tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma) \\
-\tan(\gamma) &= \tan(\alpha+\beta) \\
-\tan(\gamma) &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \\
-\tan(\gamma)(1-\tan(\alpha)\tan(\beta)) &= \tan(\alpha)+\tan(\beta) \\
-\tan(\gamma)+\tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\gamma) &= \tan(\alpha)+\tan(\beta) \\
\tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\gamma) &= \tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma).
\end{aligned}$$

□

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à nos tangentes, on obtient

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\gamma)} &\leq \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)}{3} \\
&\leq \frac{\tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\gamma)}{3} \quad \text{(d'après la proposition)}
\end{aligned}$$

Posons maintenant $X := \tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\gamma)$ et rappelons notre inégalité.

$$\sqrt[3]{X} \leq \frac{X}{3} \iff 3\sqrt{3} \leq X.$$

On va maintenant regarder le cas d'égalité, c'est-à-dire quand $X = 3\sqrt{3}$. D'après une propriété de l'inégalité arithmético-géométrique, ceci se produit si et seulement si les trois tangentes sont égales. Cela entraîne que les angles sont égaux, et donc que $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

On peut ainsi énoncer le théorème suivant :

Théorème. *Parmi tous les triangles plans circonscrits à un cercle, celui qui a le plus petit perimètre est le triangle équilatéral.*

6. La relation entre l'aire et le périmètre du triangle

Plaçons nous dans le plan euclidien. Si on observe de près les expressions de l'aire et du périmètre d'un triangle en fonction du rayon du cercle inscrit, on remarque que $\frac{A}{P} = \frac{1}{2}r$.

Remarque. Cette relation est vraie pour tout polygone circonscrit à un cercle!

En effet, on peut toujours découper un polygone en triangles partageant un sommet, le centre du cercle inscrit, quand il existe. Pour la figure 8 ci-dessous, on a $A = (a+b+c+d)\frac{r}{2} = \frac{Pr}{2}$.

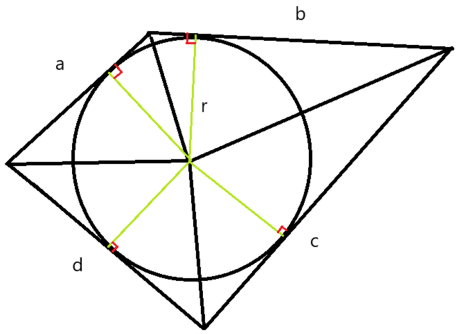

FIGURE 8 – Un exemple de polygone circonscrit à un cercle

Dans un premier temps, on applique cette observation à une région plane pavée par des mailles triangulaires, ou plus généralement, en forme de polygones circonscrits à des cercles de rayons au plus r. En additionnant les périmètres des mailles, on trouve que

$$\frac{P_{total}}{2} \geq \frac{A_{total}}{r}.$$

On remarque ensuite que calculer la longueur de corde revient à faire la somme des périmètres des mailles en considérant le fait qu'un bout de corde de la résille est partagé par deux mailles, sauf s'il se trouve sur le bord de la région. Ainsi, on obtient

$$L_{corde} = \frac{P_{total}}{2} + \frac{L_{bord}}{2}.$$

En combinant les deux équations, on trouve que

$$L_{corde} \geq \frac{A_{total}}{r} + \frac{L_{bord}}{2}.$$

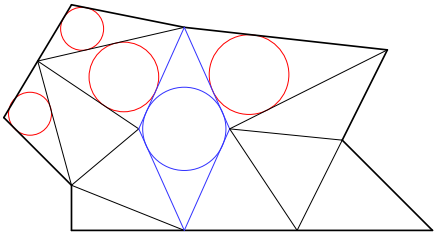

FIGURE 9 – Région plane pavée de triangles et d'un losange

Dans un second temps, on s'intéresse à un cylindre : partant d'un rectangle euclidien, collons deux extrémités opposés pour former un cylindre. Couvrons-le d'une résille (Figure 10). Chaque maille étant un polygone euclidien circonscrit à un cercle de rayon au plus r, l'inégalité

$$\frac{P_{total}}{2} \geq \frac{A_{total}}{r}.$$

est encore vraie, de même que sa conséquence

$$L_{corde(cylindre)} \geq \frac{A_{total}}{r} + \frac{L_{bord(cylindre)}}{2}.$$

Par exemple, choisissons le cylindre tangent à l'équateur de l'hémisphère et d'aire égale à celle de l'hémisphère (voir Figure 10).

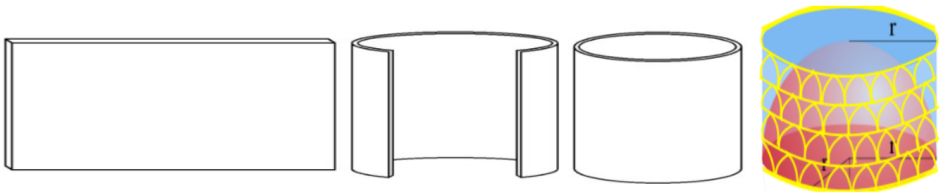

FIGURE 10 – Une résille sur le cylindre

Ce cylindre particulier ayant deux bords de longueur égale à celle de l'équateur de l'hémisphère, on obtient une minoration pour la longueur de la corde d'une résille tracée sur ce cylindre, dont les cercles inscrits ont des rayons au plus 0,11 m :

$$L_{corde(cylindre)} \geq \frac{A_{total}}{r} + 2\pi R \approx 6980,61\,\text{m}.$$

Un théorème dû à Archimède affirme qu'une hémisphère et un cylindre de même hauteur, qui lui est tangent le long de son bord, ont la même aire. On peut ainsi énoncer le théorème suivant.

Théorème. *Sur un cylindre tangent à l'hémisphère qui supporte la vasque le long de son équateur, et de même hauteur (et donc de même aire) que l'hémisphère, une résille formée de polygones ayant un cercle inscrit de rayon au plus 11 cm, a une longueur au moins égale à 6980,61 m.*

Même si le cylindre constitue une approximation grossière de l'hémisphère, la borne inférieure obtenue est voisine de la valeur trouvée au paragraphe 2.

7. Géométrie sphérique

Les calculs précédents se basent sur la géométrie euclidienne, et on n'est pas sûr que les formules utilisées restent vraies sur la sphère. L'inégalité $\frac{rP}{2A} \geq 1$ est-elle également vraie sur la sphère ?

Sur une sphère de rayon R et de centre O, la distance entre deux points A et B vaut R fois la mesure en radians de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. C'est la longueur du plus petit des deux arcs délimités par A et B le long du grand cercle qui les contient. Le lieu des points situés à distance r de A est un petit cercle (intersection de la sphère avec un plan ne passant pas par le centre, en général). On l'appelle *cercle sphérique de rayon r*, car il joue le même rôle que le cercle de rayon r dans le plan.

Un *triangle sphérique* $\triangle$ est une partie de la sphère délimitée par trois arcs de grands cercles, qu'on appelle ses *côtés*. Le périmètre $P_\triangle$ du triangle $\triangle$ est la somme des longueurs des trois côtés. On admet qu'on peut parler d'aire sur la sphère, avec les propriétés usuelles d'additivité. On note $A_\triangle$ l'aire du triangle $\triangle$. On admet que tout triangle sphérique possède un cercle sphérique inscrit, i.e. tangent à ses trois côtés, dont on note $r_\triangle$ le rayon.

On va étudier le quotient $\frac{r_\triangle P_\triangle}{2A_\triangle}$ pour des triangles particuliers, inspirés de ceux rencontrés dans la partie 3.2. Il s'agit de triangles sphériques dont deux côtés sont des demi-méridiens, et le troisième, la *base*, est un arc de l'équateur, de longueur $b := 0{,}22$ m. On cherche le rayon r du cercle sphérique inscrit dans un tel triangle (Figure 11).

Soit C' le centre de ce cercle $\mathscr{C}$. Nommons β l'angle au sommet (qu'on note B) du triangle sphérique formé par deux méridiens et traçons sa bissectrice $[BC]$. Nommons D le pied du méridien à gauche

de C et A le pied à droite ($DA = b$) pour former le triangle sphérique BCA rectangle en C. Soit A' le point de tangence de $\mathscr{C}$ et du côté (BA). Le triangle $BC'A'$ est donc rectangle en A' et on a $C'A' = r$. Posons maintenant $BC =: c$ et $BC' =: c' = c - r$. Soit O le centre de la sphère. Appliquons maintenant une formule de trigonométrie sphérique à $BC'A'$, valable pour les triangles rectangles sphériques. Rappelons qu'en géométrie sphérique, une longueur AB correspond à l'angle $\widehat{AOB}$ où O est le centre de la sphère, multiplié par le rayon de la sphère. Ainsi, dans la formule qui suit, on a en réalité $\frac{r}{R} = \widehat{COC'} = \widehat{C'OA'}$ et $\frac{c'}{R} = \widehat{BOC'}$.

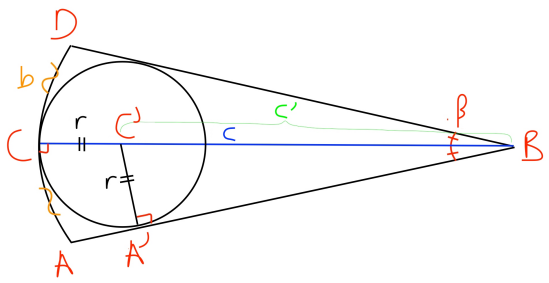

FIGURE 11 – Un secteur méridien

$$\begin{aligned}
\sin(\tfrac{r}{R}) = \sin\left(\tfrac{\beta}{2}\right)\sin(\tfrac{c'}{R}) &= \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{2\pi R/b}}{2}\right)\sin(\tfrac{c-r}{R}) \\
&= \sin\left(\frac{\frac{b}{R}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{2\pi R}{4}-r}{R}\right) = \sin\left(\tfrac{b}{2R}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{r}{R}\right) \\
&= \sin\left(\tfrac{b}{2R}\right)\left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cos(\tfrac{r}{R}) - \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\sin(\tfrac{r}{R})\right) = \sin\left(\tfrac{b}{2R}\right)\cos(\tfrac{r}{R}) \\
&= \sin\left(\tfrac{0{,}22}{22}\right)\cos(\tfrac{r}{R}) \quad \text{(par application numérique)}
\end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{\sin(\frac{r}{R})}{\cos(\frac{r}{R})} = \sin(\tfrac{0{,}22}{22}) \iff \tan(\tfrac{r}{R}) = \sin(0{,}01) \iff \tfrac{r}{R} = \arctan(\sin(0{,}01)) \approx 0{,}0099995\text{rad}.$$

Le rayon du cercle $\mathscr{C}$ (c'est la longueur d'un arc de cercle sur la sphère) est donc égal à $r \approx 0{,}1099945 \approx 0{,}11\ m$, ce qui parait cohérent avec la condition imposée par rapport au ballon de foot de rayon 0,11 m.

De plus, chaque triangle a un périmètre égal à $P_\triangle = b + \frac{2\pi R}{2} \approx 34{,}78$ m. Nous pouvons aussi calculer leur aire. Par symétrie, l'aire d'un secteur méridien est proportionnelle à la longueur de sa base (c'est évident si $\frac{2\pi R}{b}$ est entier, il suffit de diviser l'aire de l'hémisphère nord par le nombre de triangles formés; cela reste vrai si $\frac{2\pi R}{b}$ est rationnel, et on passe à la limite). Il vient $A_\triangle = \frac{4\pi R^2}{2} / \frac{2\pi R}{b} = bR = 2{,}42\ \text{m}^2$.

Finalement, on obtient $\frac{r_\triangle P_\triangle}{2A_\triangle} \approx 0{,}79 < 1$ ce qui montre que notre hypothèse est fausse pour les polygones sur la sphère!

Remarque. Pour le cas de la résille qui divise la sphère en tranches (approximativement des rectangles), on ne peut même pas parler de cercles sphériques inscrits! Les tranches ne sont pas des polygones (les côtés ne sont pas des arcs de grands cercles). En outre, il est impossible de tracer un cercle tangent à tous les côtés de ce "rectangle"! Notre démarche ne fonctionne donc pas ici.

8. Conclusion

Tout d'abord, nous avons proposé une modélisation de la résille originale qui donne une longueur de 6980,73 m. Pour réduire la longueur de corde utilisée, nous avons imaginé deux autres types de

résilles. La première coupe la sphère en tranches, approximativement en forme de rectangles de largeur le demi-périmètre d'un grand cercle et de longueur 22 cm. L'idée derrière la deuxième était de fabriquer une résille en se basant sur des méridiens espacés de 22 cm le long de l'équateur. La résille qui nécessitait le moins de corde, soit 3524,92 m, était la première, divisant en deux la longueur de corde utilisée pour la résille originelle. Ceci est du au fait que nous ayons essayé de maximiser l'aire des figures formées sur la surface de la sphère par la résille. En fait, il n'y a pas de limite à cette aire, si on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires.

Cela nous a menés à modifier la question initiale, en supposant en plus que les mailles de la résille sont des triangles, ou plus généralement des polygones circonscrits à des cercles. Nous nous sommes placés d'abord sur le plan euclidien et avons essayé de trouver quel triangle de rayon inscrit donné, avait le plus petit périmètre. Nous avons démontré de deux manières qu'il s'agissait du triangle équilatéral.

Cette voie nous a permis d'observer une relation entre l'aire et le périmètre des polygones ayant un cercle inscrit de rayon fixé : $\frac{A}{P} = \frac{1}{2}r$. Cette relation a été très importante puisqu'elle nous a permis d'écrire l'inégalité suivante, $\frac{P_{total}}{2} \geq \frac{A_{total}}{r}$, permettant de minorer la longueur de corde nécessaire par 6980,61 m. La résille originale est donc très proche de ce minimum (différence d'environ 11 centimètres soit $0,001\%$) ! On suppose que la faiblesse de cette différence provient du fait que les mailles dans la résille originale ne sont pas exactement des polygones.

Cependant, nous avons remarqué que sur la sphère, même quand il est possible de construire un cercle inscrit aux figures formés par la résille, cette minoration n'était pas toujours vraie. En effet, on a vu clairement que pour certains triangles sphériques, comme ceux formés par les secteurs méridiens sur la sphère, c'était l'inégalité inverse de celle qu'on avait trouvé qui était vraie !

Toutefois, les polygones formés par les résilles qui nous intéressent ont une particularité : ayant un cercle inscrit de rayon 11 cm, ils sont tout petits comparés à notre sphère géante de diamètre 22 m ! On a ainsi conjecturé que notre inégalité euclidienne était presque vraie pour ces petits polygones, et que la minoration était toujours valable, à une faible erreur près. Pour mieux comprendre cette conjecture, vous pouvez imaginer que vous dessinez un polygone à la main sur le sol. Même si la terre est approximativement en forme de sphère, le polygone que vous avez dessiné respecte les propriétés de la géométrie euclidienne, comme ceux formés par la résille sur la vasque olympique !

Cette conjecture a été démontrée par notre chercheur, M. Pansu —qui nous a guidés tout au long de ce projet —, d'abord par un calcul de développement limité suggérant que la minoration obtenue serait correcte à 1 m près, pour une résille sur la sphère formée de triangles grossièrement équilatéraux (voir `https://images.math.cnrs.fr/la-vasque-olympique-de-paris/`), puis par une démonstration garantissant une erreur inférieure à 10 m sur la longueur totale sous une hypothèse moins restrictive sur les angles. Nous voulons, pour conclure, le remercier de nous avoir proposé ce problème très intéressant, qui nous a tenus à coeur, et qui nous a permis de découvrir des problématiques passionantes comme l'étude locale des surfaces non-euclidiennes. Nous remercions également le relecteur de MATh.en.JEANS dont les critiques ont permis de corriger une erreur et d'améliorer considérablement la rédaction.