Le jeu de stratégie

Année 2024 – 2025

Gaspard DINAND et Malo CHASTELLIER élèves de 2nde

Jeanne MOYNET élève de Terminale

Établissement : Lycée du Pays d'Aunis à Surgères (17)

Encadrés par : Gaëtan PREVAUD

Chercheur·Chercheuse(s) : Abdallah EL HAMIDI, Université de La Rochelle (17)

1. Présentation du sujet

On prend chacun son tour des grains dans un tas (qui contient initialement, par exemple 400 grains ou 9 grains), sans pouvoir en prendre plus que la moitié.

Par exemple, si le tas contient 400 grains, vous pouvez en prendre au plus 200 ; s'il contient 9 grains, vous pouvez en prendre au plus 4.

Lorsque le tas n'a plus qu'un grain, il n'est plus possible de jouer, le joueur qui se trouve devant cette situation a donc perdu.

<u>Problématique :</u> Un des deux joueurs est-il sûr de gagner ? Comment ?

2. Exemple de partie

Prenons un tas de 100 grains:

- le premier joueur prend 37 grains (il reste donc 63 grains)
- le deuxième joueur en prend 24 grains (il reste 39 grains)
- le premier joueur en prend donc 8 grains (pour arriver à 31 grains restant)
- le deuxième joueur choisit de prendre 12 grains (19 grains restant)
- le premier joueur prend 4 grains (encore 15 grains)
- le deuxième joueur prend le maximum de grains qu'il peut, soit 7 grains (8 grains restant)
- le premier prend 1 seul grain (7 grains au total restant)
- le deuxième joueur prend le minimum possible, soit 1 grain (6 grains encore restant)
- le premier joueur prend la moitié des grains restant, soit 3 grains (il en reste donc 3 grains)

- le deuxième joueur, faute de choix, ne prend qu'1 seul grain (2 grains restant seulement)
- Et le premier joueur en prend 1 pour laisser le dernier grain au deuxième
- Le deuxième joueur est bloqué car il ne peut plus prendre de grain, il a donc perdu

3. La stratégie gagnante

Nous avons trouvé une stratégie utilisant des nombres particuliers (que l'on appellera « des nombres perdants ») nous permettant de gagner à tous les coups en étant le premier joueur.

Cette technique consiste à prendre un nombre de grains de riz de manière à laisser à notre adversaire un nombre particulier de grains de riz à chaque tour. Ce nombre de grains de riz laissé à notre adversaire est appelé « nombre perdant ». Notre technique nous permet de passer d'un « nombre perdant » à un autre jusqu'à bloquer notre adversaire c'est-à-dire ne lui laisser qu'un seul grain.

Les premiers nombres perdants sont le 1, le 3, le 7, le 15... Dans notre exemple de partie, le premier joueur est passé par tous ces nombres. Si nous prenons un autre exemple de partie avec 20 grains au départ, alors le premier joueur doit prendre 5 grains pour arriver au « nombre perdant » le plus proche (ici 15) ; à partir de ce moment là, le deuxième joueur aura beau prendre n'importe quel nombre de grains, le premier joueur pourra toujours descendre au « nombre perdant » suivant (ici 7) : il a donc déjà gagné.

4. Les nombres perdants

I - Définition :

Les « nombres perdants » sont des nombres sur lesquels on est sûr de perdre si nous tombons dessus à notre tour de jeu et si l'adversaire sait comment les utiliser (applique la stratégie). Ces nombres perdants sont liés les uns aux autres et les connaître permet de jouer sans prendre en compte le jeu adverse (nombre de grains pris par l'adversaire) car, comme on ne peut prendre que la moitié des grains restant ; le joueur n°2 ne peut pas « descendre » au nombre perdant suivant contrairement au joueur n°1. Ce dernier peut donc arriver à 1 grain en premier et donc le laisser à l'adversaire pour gagner.

II - Une première formule :

Ces « nombres perdants » sont infinis. Ils sont liés les uns aux autres par une formule simple : Nombre perdant = Nombre perdant précédent ×2 + 1 sachant que le premier nombre perdant est 1. Cette **<u>formule de récurrence</u>** présente un défaut de taille c'est que pour déterminer un nombre perdant quelconque, il faut connaître tous les précédents.

III - Une deuxième explicite :

A partir de cette formule de récurrence, on peut démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence une **formule explicite** utilisant les notations des suites numériques :

$U(n) = 2^n - 1$ où $U(n)$ est le « nombre perdant ».

Grâce à cette formule, nous pouvons trouver tous ces nombres et ainsi gagner pour n'importe quel nombre de grains de départ.

IV - Exemple de « nombres perdants » :

Voici un tableau contenant une partie de cette suite numérique :

2^1 -1 = 1	2^2 -1 = 3	2^3 -1 = 7	2^4 -1 = 15
2^5 -1 = 31	2^6 -1 = 63	2^7 -1 = 127	2^8 -1 = 255
2^9 -1 = 511	2^{10} -1 = 1 023	2^{11} -1 = 2 047	2^{12} -1 = 4 095
2^{13} -1 = 8 191	2^{14} -1 = 16 383	2^{15} -1 = 32 767	2^{16} -1 = 65 535

Remarque : Les nombres perdants se terminent tous par 1, puis 3, puis 7, puis 5 et cela en boucle.

5. Mais comment déterminer n dans la formule explicite ?

Nous avons trouvé une méthode pour calculer n. Elle consiste à prendre le nombre de grains restant dans le tas et appliquer le schéma suivant :

- Si nombre de grains restant pair, alors diviser ce nombre par 2
- Si nombre de grains restant impair, alors enlever 1
- Répéter ce processus jusqu'à arriver à 1 grain. On n'a qu'à compter le nombre de fois où on a divisé par 2, cela nous donne n.

Exemple : Prenons 745 grains ;

- On enlève 1 car 745 est impair => On obtient 744 grains
- Comme 744 est pair, on divise par 2 => Il nous reste 372 grains
- On peut répéter cette opération une deuxième fois => Nous arrivons à 186 grains
- Et une troisième fois => Reste : 93 grains
- Nombre impair : on enlève 1 => Reste : 92 grains
- On peut de nouveau diviser par 2 => Reste : 46 grains
- Même opération => Reste : 23 grains
- On enlève 1 => Reste : 22 grains
- On peut « descendre » à 11 grains
- encore -1 => Reste 10 grains
- Puis 5 grains
- Puis 4 grains
- Puis 2 grains
- Et pour finir : 1 seul grain.

Maintenant, il ne reste qu'à compter le nombre de fois où on a divisé par 2 => Ici, 9 fois. Donc, nous devons « descendre » à 2^9 -1, soit 511 (le nombre perdant juste en dessous de 745).

6. Conclusion

Le premier joueur peut toujours gagner s'il suit la stratégie gagnante.

Remarque : Si le nombre de grains de départ est un nombre perdant, alors le deuxième joueur peut gagner s'il effectue la stratégie gagnante).

Notes d édition

La conclusion est troublante : elle énonce d'une part que le premier joueur peut toujours gagner s'il suit la stratégie gagnante. Mais la remarque qui suit semble le contredire.
Il faudrait énoncer la conclusion sous la forme :

- Si le nombre de grains de départ n'est pas un nombre perdant, alors le 1er joueur est sûr de gagner s'il applique la stratégie gagnante.

- Si le nombre de grains de départ est un nombre perdant, alors c'est le 2eme joueur qui est sûr de gagner s'il applique la stratégie gagnante.