

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Le roi de la forêt...

Année 2023– 2024

Aktaş Damla et Pilon Lila, élèves de Première

Établissement : Lycée Français Pierre Loti d'Istanbul

Enseignant-es : Gaelle Berthet, Virginie Findeling et Stéphane Obama

Chercheurs : Jean-Baptiste Bardet (université de Rouen) et Can Ozan Oguz (université de Galatasaray)

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

En l'absence de lion dans la forêt mathématique, on cherche à élire un roi (ou une reine...). Il y a 5 candidats :

- Albertine, La Lapine
- Bob, Le renard
- Charlotte, La chouette
- Damien, Le cerf
- Eloi, le loup

Mais comment faire une élection équitable ?

Nous avons notamment plusieurs modalités d'élections qui vont nous permettre de comparer ces scrutins.

D'autres questions se rajoutent dans ces cas-là.

Plusieurs questions essentielles pour nos formulations de réponses ont été posées :

- Toutes les modalités donneraient-elles le même vainqueur ?
- Y a-t-il toujours un vainqueur ?
- Est-il toujours unique ?
- Combien de bulletins sont possibles selon le mode d'élection choisi ?

Enfin, existerait-il une autre façon de faire des élections équitables ?

Deux élections tests sont proposées pour observer les changements dans différents modes d'élections :

Election 1

$A > B > C > D > E$ 33%
 $B > D > C > E > A$ 16%
 $C > D > B > A > E$ 3%
 $C > E > B > D > A$ 8%
 $D > E > C > B > A$ 18%
 $E > C > B > D > A$ 22%

Election 2

$A > B > \underline{D} > \underline{C} > E$ 33%
 $B > D > C > E > A$ 16%
 $C > D > B > A > E$ 3%
 $C > E > B > D > A$ 8%
 $D > E > C > B > A$ 18%
 $E > C > B > D > A$ 22%

1.2. Résultats

Vous pouvez donc ici voir apparaître chaque vainqueur pour chaque « modalité » d'élections basées sur la proposition d'un certain animal.

	Chouette	Ours	Renard	Loup	Alternatif	Tortue
Tour 1	Charlotte	Charlotte	Eloi	Albertine	Damien	Bob
Tour 2	Charlotte	Bob	Eloi	Albertine	Damien	Bob

Les tours représentent les listes de préférences utilisées dans les élections un et deux.

2. Modalité de la Chouette

La Chouette propose une forme de scrutin où chacun ordonne tous les candidats par ordre de préférence sur son bulletin et qu'on élise celui qui gagnerait tous ou le plus de « duels ».

2.1. Calculs

<p>A contre B</p> <p>D>C</p> <p>A>B>C>D>E 33 %</p> <p>B>D>C>E>A 16 %</p> <p>C>D>B>A>E 3 %</p> <p>C>E>B>D>A 8 %</p> <p>D>E>C>B>A 18 %</p> <p>E>C>B>D>A 22 %</p> <p>A total:33%</p> <p>B total:67%</p> <p>G:B</p> <p>E2:=</p>	<p>B contre D</p> <p>D>C</p> <p>A>B>C>D>E 33 %</p> <p>B>D>C>E>A 16 %</p> <p>C>D>B>A>E 3 %</p> <p>C>E>B>D>A 8 %</p> <p>D>E>C>B>A 18 %</p> <p>E>C>B>D>A 22 %</p> <p>B total:79%</p> <p>D total:21%</p> <p>G:B</p> <p>E2:=</p>
<p>A contre C</p> <p>D>C</p> <p>A>B>C>D>E 33 %</p> <p>B>D>C>E>A 16 %</p> <p>C>D>B>A>E 3 %</p> <p>C>E>B>D>A 8 %</p> <p>D>E>C>B>A 18 %</p> <p>E>C>B>D>A 22 %</p> <p>A total:33%</p> <p>C total:67%</p> <p>G:C</p> <p>E2:=</p>	<p>B contre E</p> <p>D>C</p> <p>A>B>C>D>E 33 %</p> <p>B>D>C>E>A 16 %</p> <p>C>D>B>A>E 3 %</p> <p>C>E>B>D>A 8 %</p> <p>D>E>C>B>A 18 %</p> <p>E>C>B>D>A 22 %</p> <p>B total:52%</p> <p>E total:48%</p> <p>G:B</p> <p>E2:=</p>
<p>A contre D</p> <p>D>C</p> <p>A>B>C>D>E 33 %</p> <p>B>D>C>E>A 16 %</p> <p>C>D>B>A>E 3 %</p> <p>C>E>B>D>A 8 %</p> <p>D>E>C>B>A 18 %</p> <p>E>C>B>D>A 22 %</p> <p>A total:33%</p> <p>D total:67%</p> <p>G:D</p> <p>E2:=</p>	<p>C contre E</p> <p>D>C</p> <p>A>B>C>D>E 33 %</p> <p>B>D>C>E>A 16 %</p> <p>C>D>B>A>E 3 %</p> <p>C>E>B>D>A 8 %</p> <p>D>E>C>B>A 18 %</p> <p>E>C>B>D>A 22 %</p> <p>C total:60%</p> <p>E total:40%</p> <p>G:C</p> <p>E2:=</p>
<p>A contre E</p> <p>D>C</p> <p>A>B>C>D>E 33 %</p> <p>B>D>C>E>A 16 %</p> <p>C>D>B>A>E 3 %</p> <p>C>E>B>D>A 8 %</p> <p>D>E>C>B>A 18 %</p> <p>E>C>B>D>A 22 %</p> <p>A total:36%</p> <p>E total:64%</p> <p>G:E</p> <p>E2:=</p>	<p>D contre E</p> <p>D>C</p> <p>A>B>C>D>E 33 %</p> <p>B>D>C>E>A 16 %</p> <p>C>D>B>A>E 3 %</p> <p>C>E>B>D>A 8 %</p> <p>D>E>C>B>A 18 %</p> <p>E>C>B>D>A 22 %</p> <p>D total:70%</p> <p>E total:30%</p> <p>G:D</p> <p>E2:=</p>
<p>B contre C</p> <p>D>C</p> <p>A>B>C>D>E 33 %</p> <p>B>D>C>E>A 16 %</p> <p>C>D>B>A>E 3 %</p> <p>C>E>B>D>A 8 %</p> <p>D>E>C>B>A 18 %</p> <p>E>C>B>D>A 22 %</p> <p>B total:49%</p> <p>C total:51%</p> <p>G:C</p> <p>E2:=</p>	<p>C contre D</p> <p>D>C</p> <p>A>B>C>D>E 33 %</p> <p>B>D>C>E>A 16 %</p> <p>C>D>B>A>E 3 %</p> <p>C>E>B>D>A 8 %</p> <p>D>E>C>B>A 18 %</p> <p>E>C>B>D>A 22 %</p> <p>Ei:</p> <p>C total:66%</p> <p>D total:34%</p> <p>G:C</p> <p>E2:</p> <p>D total:67%</p> <p>C total:33%</p> <p>G:D</p>

2.2. Réponse apportée aux questions

– A chaque fois nous avons 10 duels à calculer.

Au premier tour, le nombre de duels gagnés par chaque candidat : $A = 0$, $B = 3$, $C = 4$, $D = 2$, $E = 1$.

Au deuxième tour: $A = 0$, $B = 3$, $C = 3$, $D = 3$, $E = 1$ (1).

– Dans le système de la chouette, les candidats sont classés par ordre de préférence, il y a ($1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$) façons de remplir le bulletin, car il y a 5 candidats et 5 choix possibles pour le premier, 4 pour le deuxième, et ainsi de suite.

3. Modalité du loup

Le loup propose que chacun mette le nom de son candidat préféré sur son bulletin et qu'on choisisse celui qui remporte le plus de voix.

3.1. Calculs

<u>Election 1</u>	<u>Election 2</u>
A>B>C>D>E 33 %	A>B>D>C>E 33 %
B>D>C>E>A 16 %	B>D>C>E>A 16 %
C>D>B>A>E 3 %	C>D>B>A>E 3 %
C>E>B>D>A 8 %	C>E>B>D>A 8 %
D>E>C>B>A 18 %	D>E>C>B>A 18 %
E>C>B>D>A 22 %	E>C>B>D>A 22 %

3.2. Réponse apportée aux questions

Celui qui l'emporte dans les deux élections est Albertine avec 33%, elle est l'unique vainqueur de cette élection.

Dans le système du loup, chaque électeur choisit son candidat préféré donc le nombre de bulletins possibles est 5 (nombre de candidats).

4. Modalité du Renard

Le renard propose une élection à 2 tours, un peu comme pour l'élection présidentielle française : on choisit les 2 qui ont obtenu le plus de voix, puis on les départage.

4.1. Calculs

Premier tour A>B>C>D>E 33 % B>D>C>E>A 16 % C>D>B>A>E 3 % C>E>B>D>A 8 % D>E>C>B>A 18 % E>C>B>D>A 22 %	→	Premier tour A>B>C>D>E 33 % B>D>C> E>A 16 % C>D>B> A>E 3 % C> E >B>D> A 8 % D> E >C>B> A 18 % E>C>B>D>A 22 %
Deuxième tour A>B>C>D>E 33%+3% B>D>C>E>A 16% C>D>B>A>E 3% C>E>B>D>A 8% D>E>C>B>A 18% E>C>B>D>A 22% +18% +8%+16%	→	Au premier test, Eloi (E) gagne avec 64% des voix contre Albertine (A) 36% des voix.

4.2. Réponse apportée aux questions

Le vainqueur est toujours le même, Eloi remporte le titre de roi avec 64% des votes, et la deuxième élection teste n'est pas prise en compte.

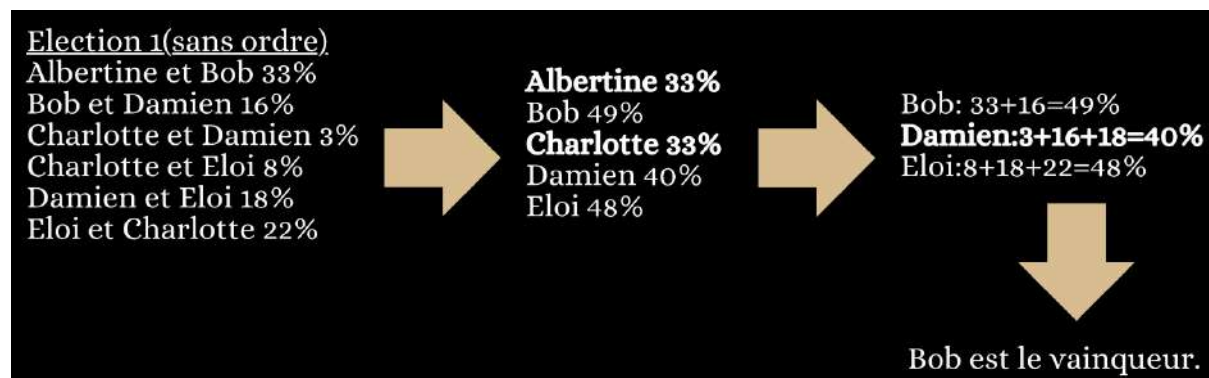
Nombre de bulletins : Dans le système du renard (élection à 2 tours), $5 + 2 = 7$ (5 choix au premier tour, 2 au deuxième).

5. Modalité de la Tortue

– La tortue propose que chacun mette les noms des gens qu'il juge dignes sur son bulletin, sans ordre et qu'on supprime ceux qui ont reçu le moins de voix... puis on refait des tours si besoin.

– Pour le cas de la tortue, on écrit le nom des candidats que chaque groupe de la population jugera le plus "digne" donc en prenant leurs 2 premières préférences, les écrivant sur un bulletin.

5.1. Calculs



Ici, nous avons procédé par élimination.

5.2. Réponse apportée aux questions

Bob est l'unique vainqueur (c'est une modalité un peu spéciale, donc il n'y aura pas de variations).

Nombre de bulletins possibles : ????

6. Modalité de L'ours (2)

6.1. Calculs

duel de C contre E $A > B > C$ 33% $B > D > C$ 16% $C > D > B$ 3% $C > E > B$ 8% $D > E > C$ 18% $E > C > B$ 22%	duel de D contre E $A > B > C$ 33% $B > D > C$ 16% $C > D > B$ 3% $C > E > B$ 8% $D > E > C$ 18% $E > C > B$ 22%	duel de A contre B $A > B > C$ 33% $B > D > C$ 16% $C > D > B$ 3% $C > E > B$ 8% $D > E > C$ 18% $E > C > B$ 22%	duel de A contre C $A > B > C$ 33% $B > D > C$ 16% $C > D > B$ 3% $C > E > B$ 8% $D > E > C$ 18% $E > C > B$ 22%
duel de A contre D $A > B > C$ 33% $B > D > C$ 16% $C > D > B$ 3% $C > E > B$ 8% $D > E > C$ 18% $E > C > B$ 22%	duel de A contre E $A > B > C$ 33% $B > D > C$ 16% $C > D > B$ 3% $C > E > B$ 8% $D > E > C$ 18% $E > C > B$ 22%	duel de B contre C $A > B > C$ 33% $B > D > C$ 16% $C > D > B$ 3% $C > E > B$ 8% $D > E > C$ 18% $E > C > B$ 22%	duel de B contre D $A > B > C$ 33% $B > D > C$ 16% $C > D > B$ 3% $C > E > B$ 8% $D > E > C$ 18% $E > C > B$ 22%
duel de B contre E $A > B > C$ 33% $B > D > C$ 16% $C > D > B$ 3% $C > E > B$ 8% $D > E > C$ 18% $E > C > B$ 22%	duel de C contre D $A > B > C$ 33% $B > D > C$ 16% $C > D > B$ 3% $C > E > B$ 8% $D > E > C$ 18% $E > C > B$ 22%		

Pour résumer les résultats :

duels	A vs B	A vs D	A vs C	A vs E	B vs C	B vs D	B vs E	C vs E	C vs D	D vs E
A total :	33%	33%	33%	33%	X		X	X	X	X
B total :	49%	X	X	X	49%	89%	51%	X	X	X
C total :	X	X	67%	X	51%	X	X	E1 : 60% E2 : 27%	E1 : 82% E2 : 49%	X
D total :	X	19%	X	X	X	21%	X	X	E1 : 18%, E2 : 51%	E1 : 37% E2 : 70%
E total :	X	X	X	40%	X	X	48%	E1 : 40% E2 : 40%	X	E1 : 30% E2 : 30%
Gagnant :	B	A	C	E	C	B	B	E1 : C, E2 : E	E1 : C E2 : D	E1 : D E2 : D

Total en %, représentant le taux de personnes votant pour le candidat dans une population.
 Si le résultat n'est pas indiqué pour la deuxième élection de forme à préciser (E1 (élection test 1), E2 (élection test 2)), alors cela signifie que le changement $D > C$ dans la première colonne représentant le taux de population ayant Albertine comme premier choix n'a pas eu d'effet sur le taux total pour chaque candidat.

De plus, on tient à préciser que si aucun des deux candidats (d'un duel) est présent dans les premières 3 préférences possibles pour ce mode d'élection, alors on supprime la ligne tout

simplement et donc le pourcentage correspondant aussi, c'est pourquoi nous n'avons pas toujours la somme des deux pourcentages égale à 100%.

6.2. Réponse apportée aux questions

Nous avons encore une fois 10 duels à calculer.

Au premier tour, le nombre de duels gagnés par chaque candidat: $A = 1, B = 3, C = 4, D = 1, E = 1$.

Au deuxième tour: $A = 1, B = 3, C = 2, D = 2, E = 2$.

L'ours propose de classer seulement ses 3 candidats préférés donc le nombre de bulletins possibles est: $5 \times 4 \times 3 = 60$.

7. Conclusion

Toutes les modalités ne donnent pas le même vainqueur. Par exemple pour le système du loup le gagnant était Albertine, alors que dans celui de la chouette c'était Eloi.

Pour les différents modes d'élection que nous avons effectués, nous n'avons pas toujours trouvé les mêmes gagnants.

Le nombre de bulletins possibles varie pour chaque mode d'élection.

Oui, il existe plusieurs autres manières de réaliser des élections équitables comme le mode alternatif ou alors par classement, pondéré etc. (3)

Notes d'édition

(1) Ici il y a 3 ex-aequo, et l'on peut se demander pourquoi le tableau des résultats page 2 indique Charlotte comme unique gagnante et donc élue reine de la forêt. Sans doute en utilisant un critère additionnel qui n'est pas précisé dans l'article.

(2) Il manque la description de la modalité de vote proposée par l'ours, qui est la suivante : l'ours propose d'appliquer la modalité de vote de la chouette (basée sur le nombre de duels remportés), mais en ne considérant que les trois premiers choix de chaque bulletin de vote.

(3) Pour aller plus loin, un théorème remarquable a été démontré par Arrow concernant les modalités de vote, qui énonce que toute procédure de vote violera nécessairement au moins une parmi 4 propriétés qui semblent pourtant désirables pour une procédure de vote. Voir : https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27impossibilit%C3%A9_d%27Arrow