Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

# « Il faut cultiver notre jardin. »

*Voltaire*

Année: 2024 – 2025

Réalisé par: Solenn LE FUR, Emma SORIANO, Ivan BRAILOV, Victor BRAILOV, Evo JOUANNIN (Élèves de 1ère)

Établissement: Lycée Montdory (Thiers)
Enseignant: Benjamin RECH
Chercheurs: Laurent BEAUDOU, Florent FOUCAUD, Lucas LORIEAU

# 1. Introduction

## 1.1. Présentation du sujet

Dans notre problème, nous travaillerons dans une grille avec des carreaux.

Un vieux jardinier a planté des plantes dans son jardin carré de côté mesurant n carreaux. Toutes ces plantes ont des racines disposées d'une façon particulière, en sachant qu'un carreau n'est occupé que par une seule racine (les plantes sont disjointes).

Ces plantes doivent être arrosées, et, pour qu'une plante soit arrosée, au moins l'une de ses racines doit recevoir de l'eau sur le carreau qu'elle occupe.

Cependant, le vieux jardinier est décédé, et les plantes, n'ayant pas encore poussé à la surface, nous ne pouvons pas savoir où elles poussent dans le jardin. On doit tout de même arroser ces plantes, tout en essayant de minimiser le coût de l'eau et donc le nombre d'arrosages utilisés.

Ainsi, on essaiera de trouver le nombre minimal d'arrosages à utiliser, tout en justifiant qu'il s'agit de la valeur optimale, en fonction des différentes situations rencontrées, qui peuvent varier en fonction de la taille et forme du jardin et des plantes.

## 1.2. Présentation des résultats obtenus

Pour un jardin n*n, nous présenterons une solution dans le cas où :
- Les plantes sont de la forme « linéaire de longueur 3 (notées PL3)», c'est-à-dire de taille 3*1. Cf. partie 2.
- Les plantes sont de la forme « angulaire de longueur 3 (notées PA3) ». Cf. partie 3.
- Les plantes sont de la forme « linéaire de longueur 4 (notées PL4)», c'est-à-dire de taille 4*1. Cf. partie 4.
- Les plantes « mixtes de longueur 3 (PL3+PA3) ». Cf. partie 5.

Nous montrerons que la solution st optimale dans tous ces cas hormis pour lorsque l'on a des plantes mixtes avec un jardin carré de coté n où n est impair.

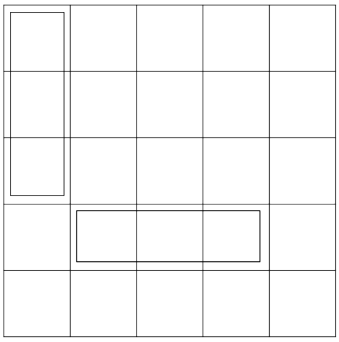
## 1.3. Présentation de la méthode employée

Afin de déterminer le nombre optimal d'arrosages à utiliser pour chaque jardin, nous allons essayer de trouver des minorants (nombres d'arrosages qu'on devra au minimum utiliser) les plus grands possibles et de trouver des majorants (nombres d'arrosages avec lesquels on est sûr de tout arroser) les plus petits possibles. Dans l'idéal, il faudrait que les minorants et les majorants se rejoignent. On obtiendrait alors une solution optimale.
Une des méthodes pour trouver des minorants consiste à agencer le plus de plantes dans le jardin, ces plantes étant disjointes comme évoqué dans la partie 1.1, et chaque plante nécessitant au moins un arrosage pour être arrosée.
Une des méthodes pour trouver des majorants est de disposer des arrosages dans le jardin de façon à ce que toutes les plantes soient arrosées, quelle que soit leur disposition.

# 2. Première situation: jardins carrés avec des plantes linéaires de taille 3

## 2.1. Présentation de la situation

Dans cette situation, nous considérons un jardin carré aux côtés de longueur n carreaux (avec $n \geqslant 3$), c'est-à-dire que nous avons nxn ou n² carreaux en tout dans le jardin. Dans ce jardin ne pousse qu'une unique variété de plantes: les PL3 (Plantes Linéaires de longueur 3). Ces dernières occupent trois carreaux adjacents et alignés du jardin, et peuvent être disposées aussi bien verticalement qu'horizontalement.



Deux PL3 dans un jardin carré
de côté n=5

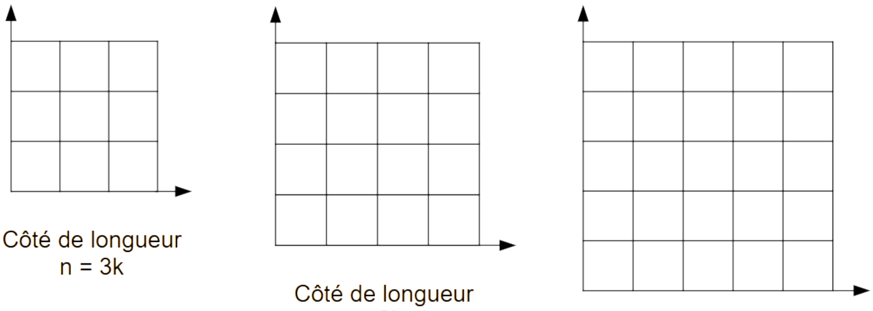
## 2.2. Description des trois cas étudiés

Pour cette situation, on distingue trois cas, en fonction de la configuration du jardin étudié, sur lesquels s'appuie notre démarche :

Le premier cas correspond au jardin de côté n, avec n multiple de 3 (on dit que n=3k avec k∈ℕ*). Par exemple, il s'agit du jardin de côté n=3 (avec k=1) ou n=6 (avec k=2).

Le second cas correspond au jardin de côté n, avec n la somme d'un multiple de 3 et de 1 (on dit que n=3k+1 avec k∈ℕ*). Par exemple, il s'agit du jardin de côté n=4 (avec k=1) ou n=7 (avec k=2).

Le troisième cas correspond au jardin de côté n, avec n la somme d'un multiple de 3 et de 2 (on dit que n=3k+2 avec k∈ℕ*). Par exemple, il s'agit du jardin de côté n=5 (avec k=1) ou n=8 (avec k=2).



Côté de longueur n = 3k — Cas 1

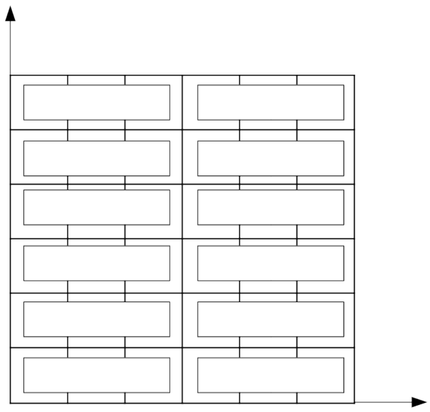
Côté de longueur n = 3k+1 — Cas 2

Côté de longueur n = 3k+2 — Cas 3

## 2.3. Recherche de minorants

Dans le 1er cas (n=3k), nous allons commencer par séparer le jardin en plusieurs carrés de côté 3 cases. Dans ces carrés, nous pouvons placer trois plantes, sans qu'il reste de carreaux inoccupés. Ainsi, le jardin étant d'une longueur totale n=3k, donc un multiple de 3, on pourra toujours le remplir de carrés de côté 3, et toutes les cases du jardin seront occupées par des plantes. Le nombre maximal de plantes pouvant être présentes dans le jardin est donc le nombre total de cases présentes dans le jardin (n² en tout), divisé par 3, soit la taille des plantes.

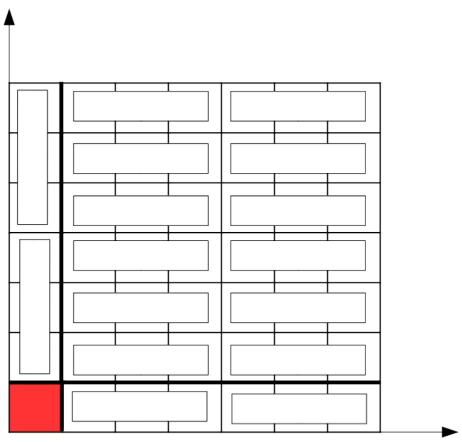
Or, si on peut placer un certain nombre de plantes disjointes dans le jardin, on est certain de devoir utiliser au minimum ce même nombre en arrosages. Ainsi, il nous faut au moins $n^2/3$ arrosages, qui est un minorant.



Configuration des plantes dans le 1er cas

Dans le 2e cas ($n=3k+1$), nous commençons par séparer le jardin en un carré de côté $3k$ et en deux rectangles: un de largeur 1 et de longueur $n=3k+1$ et un autre de largeur 1 et de longueur $n-1$ ou $3k$. Le carré pourra être rempli de plantes disjointes car c'est un carré du 1er cas. Le rectangle de largeur et longueur $3k+1$ pourra être rempli de plantes laissant un carreau non occupé car ce rectangle a une longueur qui est un multiple de 3 carreaux plus un carreau supplémentaire. Le deuxième rectangle pourra être entièrement rempli de plantes car il a pour longueur un multiple de 3 carreaux.

Ainsi, on peut remplir un jardin du 2e cas en laissant un carreau inoccupé. On aura donc besoin d'au moins $(n^2-1)/3$ arrosages avec $n^2-1$ le nombre de carreaux du carré occupés par les plantes et on divise par 3 car chaque plante occupe trois carreaux.



Configuration des plantes dans le 2e cas

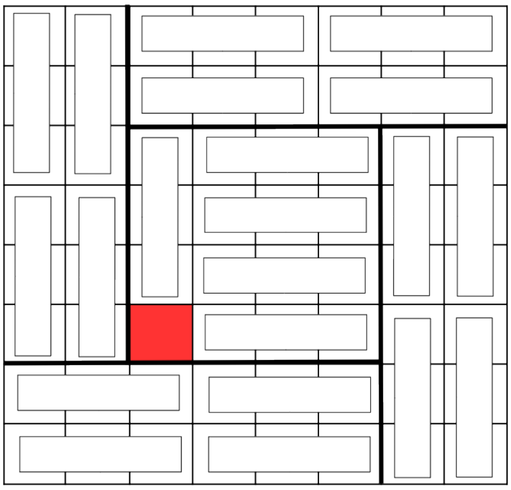
Dans le 3e cas ($n=3k+2$), nous divisons le jardin encore une fois d'une autre façon.

On commence par retrancher quatre rectangles de largeur 2 et de longueur n-2 ou 3k carreaux, dont les longueurs correspondent aux quatre côtés du jardin (voir schéma ci-dessous). Ces rectangles, quelle que soit leur longueur, pourront toujours être entièrement remplis de plantes, puisque leur longueur est un multiple de 3, des plantes de longueur 3 et largeur 1 les couvriront intégralement si on les dispose dans le sens du rectangle qu'elles occupent et en commençant par son bord.

Suite à cette opération, on obtient au centre du jardin, un carré de longueur n-4 carreaux. En effet, en retirant un rectangle de deux carreaux de largeur sur chaque côté du jardin, on enlève quatre carreaux de la longueur totale de chaque côté (mesurant initialement n carreaux). On peut affirmer que le côté du carré restant au centre sera de 3(k-1)+1 carreaux, car, en enlevant quatre carreaux de la longueur du côté de 3k+2, on effectue la soustraction: 3k+2-4. Or, 3k+2-4 = 3(k-1+1)+2-4 = 3(k-1)+3+2-4 = 3(k-1)+1.

Ce carré central obtenu, dont le côté est la somme d'un multiple de 3 et de 1, appartient donc au 2e cas, traité antérieurement, et pourra être rempli de plantes de la même façon, en laissant un unique carreau inoccupé.

Ainsi, on peut remplir un jardin du 3e cas en laissant un seul carreau de libre. On peut donc affirmer que, une fois de plus, on nécessitera au moins $(n^2-1)/3$ arrosages pour couvrir tout le jardin, qui est un minorant pour le 3e cas.



Exemple de configuration avec
un carré de côté n=8

## 2.4. Recherche de majorants

Pour le 1er cas (n=3k), on sépare le jardin en plusieurs carrés de côté 3 cases dans lesquelles on placera trois arrosages en diagonale. Etant donné que cela entraînera une configuration d'arrosage dans laquelle on retrouve un arrosage toutes les trois cases que cela soit horizontalement ou verticalement, une plante PL3 ne pourra pas se trouver dans le jardin sans être arrosée. Ainsi, chaque arrosage se trouvant à trois carreaux d'intervalle, un majorant sera égal dans ce cas à $n^2/3$, et c'est donc la valeur optimale.

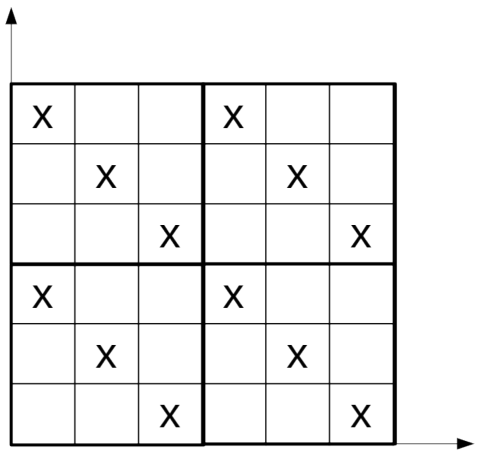


Schéma de disposition des arrosages
dans le 3e cas

Dans le 2e cas (n=3k+1), nous faisons encore des diagonales d'arrosages espacées de deux carreaux entre chacune d'elles mais en commençant par placer les deux premiers arrosages sur les deux carreaux adjacents au carreau en bas à gauche. Toutes les plantes sont ainsi arrosées où qu'elles se situent car elles occupent trois cases en longueur.

Pour déterminer le nombre d'arrosages employés, nous divisons le jardin. Nous obtenons ainsi un carré de côté n-1 soit 3k+1-1=3k. On remarque que c'est un carré du 1er cas qu'on remplit d'arrosages de la façon vue précédemment. Il nous reste ensuite deux rectangles de largeur 1 et de longueur 3k (un multiple de 3 carreaux). On les arrose en plaçant un arrosage tous les trois carreaux. On place les deux premiers arrosages sur les deux carreaux adjacents au carreau en bas à gauche qui est la dernière partie qu'on retranche du jardin.

Ainsi, on place un arrosage pour trois carreaux avec un carreau supplémentaire. On est donc sûrs de pouvoir arroser tout le jardin avec $(n^2-1)/3$ arrosages, ce qui est une valeur optimale. Dans cette formule, $n^2-1$ est le nombre de carreaux du jardin moins le carreau supplémentaire et on divise par 3 car on arrose un carreau sur trois.

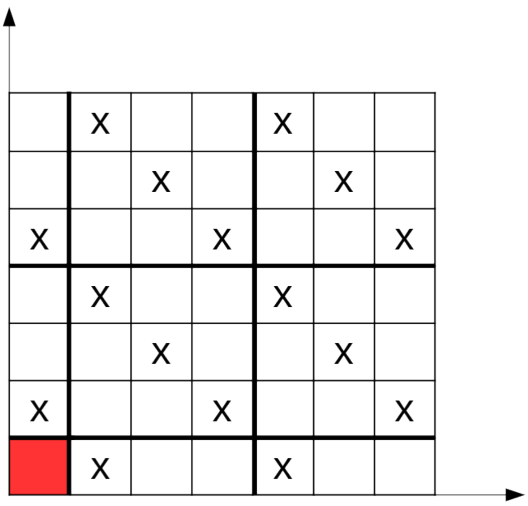


Schéma de disposition des arrosages
dans le 2e cas

Dans le 3e cas (n=3k+2), nous faisons, une fois de plus, des diagonales d'arrosages espacées de deux carreaux, mais, cette fois-ci, en commençant par placer un premier arrosage dans le carreau en bas à gauche. Avec cette configuration, nous sommes certains qu'aucune plante ne pourrait passer, car les diagonales ainsi disposées occupent toujours un carreau sur trois aussi bien horizontalement que verticalement.

Pour déterminer le nombre d'arrosages utilisés dans cette configuration, nous séparons les différentes parties du jardin. On commence par en retrancher un carré de côté n-1, adjacent aux côtés haut et gauche du jardin. Ce carré a un côté égal à 3k+2-1 = 3k+1 carreaux, ce qui signifie qu'il correspond au 2e cas étudié. Par conséquent, on peut le remplir d'arrosages de la façon expliquée précédemment. Ensuite, on retranche deux rectangles de largeur 1 et longueur 3k carreaux, dont les longueurs correspondent respectivement aux côtés gauche et bas du jardin, de telle sorte qu'il nous reste un groupe de trois carreaux dans l'angle gauche du bas. Ces figures restantes sont remplies en prolongeant les diagonales du carré déjà retranché antérieurement.

On sait donc que le carré de côté 3k+1 aura un arrosage pour trois carreaux et un carreau supplémentaire (voir démonstration pour les majorants du 2e cas), les rectangles, ayant été remplis en prolongeant les diagonales, auront un arrosage par groupe de trois carreaux, et le groupe de trois carreaux restant comportera un arrosage unique.

Ainsi, on a au total un arrosage pour trois carreaux et un carreau supplémentaire, ce qui nous permet d'affirmer que la méthode explicitée permet de couvrir tout le jardin avec $(n^2-1)/3$ arrosages, et c'est donc la valeur optimale.

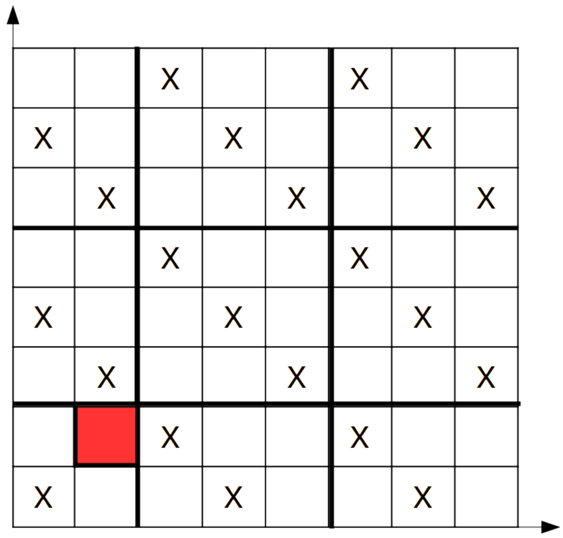


Schéma de disposition des arrosages
dans le 3e cas

# 3. Deuxième situation: jardins carrés avec plantes angulaires de taille 3

## 3.1. Présentation de la situation

Dans cette situation, nous considérons un jardin carré avec un côté de longueur n carreaux (avec $n \geqslant 2$), c'est-à-dire que nous avons nxn ou n² carreaux en tout dans le jardin. Dans ce jardin ne pousse qu'une unique variété de plantes: les PA3 (Plantes Angulaires de longueur 3). Ces dernières occupent trois carreaux adjacents du jardin, et ont une forme de L. Elles peuvent aussi être tournées dans tous les sens dans le jardin.

## 3.2. Description des deux cas étudiés

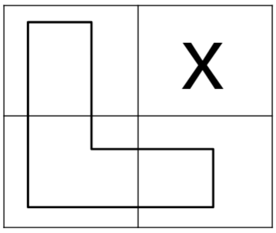
Pour cette situation, on distingue deux cas, en fonction de la configuration du jardin étudié, sur lesquels s'appuie notre démarche :

Le premier cas correspond au jardin de côté n, avec n multiple de 2 donc n pair (on dit que $n=2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$). Par exemple, il s'agit du jardin de côté $n=2$ (avec $k=1$) ou $n=4$ (avec $k=2$).

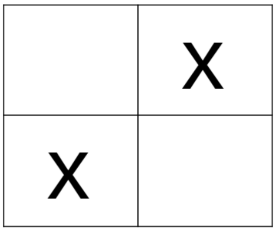
Le second cas correspond au jardin de côté n, avec n la somme d'un multiple de 2 et de 1 donc n impair (on dit que $n=2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$). Par exemple, il s'agit du jardin de côté $n=3$ (avec $k=1$) ou $n=5$ (avec $k=2$).

## 3.3. Recherche de minorants

Afin de trouver des minorants (nombres d'arrosages à utiliser au minimum) aussi élevés que possible, nous opérons avec des carrés de 2 carreaux de côté. Ces carrés, bien qu'ils ne laissent passer qu'une plante unique, nécessitent deux arrosages optimalement pour être couverts, car lorsqu'on n'en place qu'un seul, la plante peut toujours être disposée sur les trois carreaux restants.




Carré de 2x2 carreaux avec 1 arrosage




Carré de 2x2 carreaux rempli

Ainsi, dans le 1er cas ($n=2k$), on peut diviser le jardin en carrés de côté 2, qui le couvriront totalement, puisque n est pair (ou multiple de 2). Ces carrés sont disjoints et il faudra au moins deux arrosages par carrés pour être sûr qu'aucune plante ne reste sans arrosage. De cette façon, le nombre de carrés sera égal au nombre de carreaux du jardin divisé par 4, ou $n^2/4$. Et le nombre d'arrosages sera égal à deux fois le nombre de carrés soit $2n^2/4$, ou $n^2/2$.

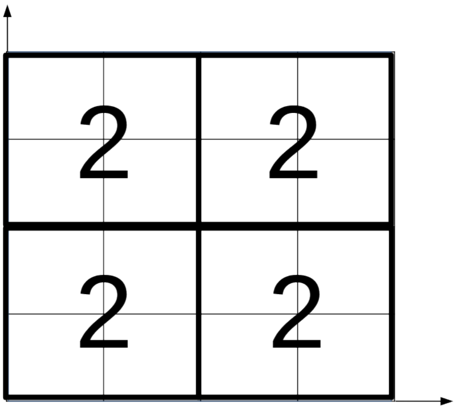



Schéma de disposition des carrés dans le 1er cas

Dans le 2e cas ($n=2k+1$), la disposition change, puisque les carrés de côté 2 ne pourront pas couvrir le jardin intégralement. On doit par conséquent en placer le maximum, en ajoutant des plantes. C'est pourquoi nous adoptons une configuration dite de la "double pyramide", en disposant les carrés de 2×2 comme présenté ci-dessous. De fait, les deux pyramides peuvent être vues comme les deux uniques parties d'un carré de côté n-1 et nous plaçons une plante angulaire entre les deux, tous les deux carreaux. Ainsi, on aura $(n-1)^2/4$ carrés 2*2 disjoints, soit au minimum $(n-1)^2/2$ arrosages à placer dans les pyramides, et on y ajoute $(n-1)/2$ plantes angulaires placées entre elles et disjointes les unes des autres, soit au minimum $(n-1)/2$ arrosages dans cette zone. On a donc un minorant de $((n-1)^2+(n-1))/2$, ou autrement dit $(n^2-2n+1+n-1)/2$, soit $(n^2-n)/2$.

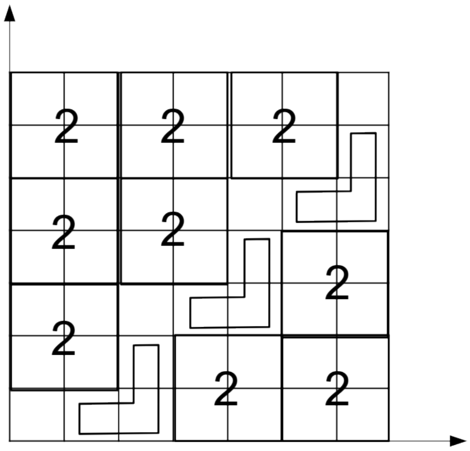



Schéma de disposition des carrés et
plantes dans le 2e cas

## 3.4. Recherche de majorants

Afin de trouver des majorants (nombre d'arrosages pour être sûr de tout arroser), nous savons qu'une plante angulaire occupe deux colonnes, nous pouvons donc disposer des arrosages sur une colonne sur deux.

Ainsi, dans le 1er cas (n=2k), nous plaçons des arrosages sur une colonne sur deux. De cette manière, nous utilisons en tout $n^2/2$ arrosages, car ces derniers occupent la moitié des carreaux du jardin de côté pair. Nous retrouvons ainsi la valeur du minorant, et c'est donc la valeur optimale.

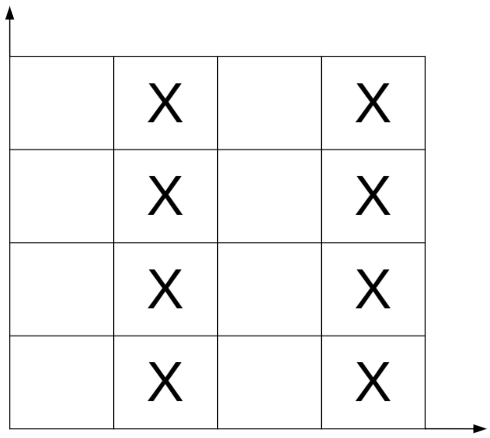



Schéma de disposition des arrosages
dans le 1er cas

Dans le 2e cas (n=2k+1), on remplit, une fois de plus, une colonne sur deux, mais en commençant toujours par remplir la seconde colonne du jardin, dans le but de minimiser le nombre d'arrosages utilisés. De cette façon, si on retranche la dernière colonne du jardin, on obtient un rectangle dont la moitié des carreaux sera remplie d'arrosages, car la largeur étant n-1, il s'agit d'un nombre pair. Ce rectangle comportera (n-1)n carreaux en tout, ou $n^2$-n. Ainsi, le nombre d'arrosages sera de $(n^2-n)/2$, et et c'est donc la valeur optimale.

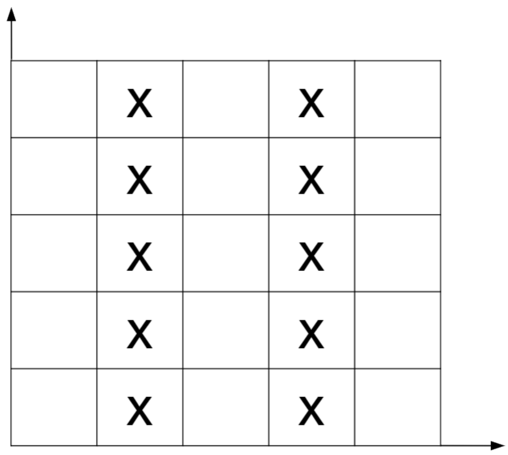



Schéma de disposition des arrosages
dans le 2e cas

# 4. Troisième situation: jardins carrés avec des plantes linéaires de taille 4

## 4.1. Présentation de la situation

Dans cette situation, nous opérons, une fois de plus, dans un jardin carré avec un côté de longueur n carreaux (avec $n \geqslant 4$). Dans ce jardin ne pousse qu'une unique variété de plantes: les PL4 (Plantes Linéaires de longueur 4). Ces dernières occupent quatre carreaux adjacents et alignés du jardin, et peuvent être disposées aussi bien verticalement que horizontalement, de la même manière que les PL3.

## 4.2. Description des quatre cas étudiés

Pour cette situation, on distingue quatre cas, en fonction de la configuration du jardin :

Le premier cas correspond au jardin de côté n, avec n multiple de 4 (on dit que $n=4k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$). Par exemple, il s'agit du jardin de côté $n=4$ (avec $k=1$) ou encore du jardin de côté $n=8$ (avec $k=2$).

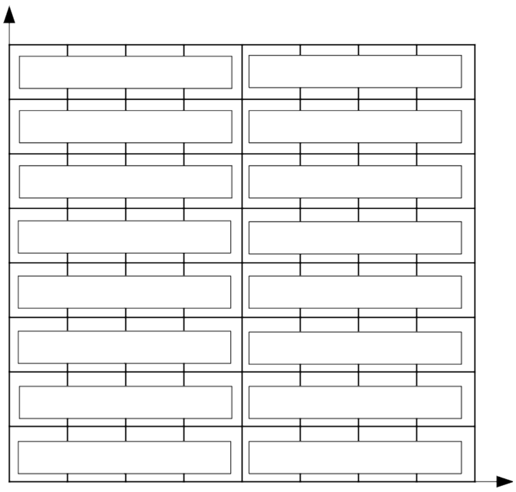
Le second cas correspond au jardin de côté n, avec n la somme d'un multiple de 4 et de 1 (on dit que $n=4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$). Par exemple, il s'agit du jardin de côté $n=5$ (avec $k=1$) ou $n=9$ (avec $k=2$).

Le troisième cas correspond au jardin de côté n, avec n la somme d'un multiple de 4 et de 2 (on dit que $n=4k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$). Par exemple, il s'agit du jardin de côté $n=6$ (avec $k=1$) ou $n=10$ (avec $k=2$).

Le quatrième cas correspond au jardin de côté n, avec n la somme d'un multiple de 4 et de 3 (on dit que n=4k+3 avec k∊ℕ*). Par exemple, il s'agit du jardin de côté n=7 (avec k=1) ou n=11 (avec k=2).

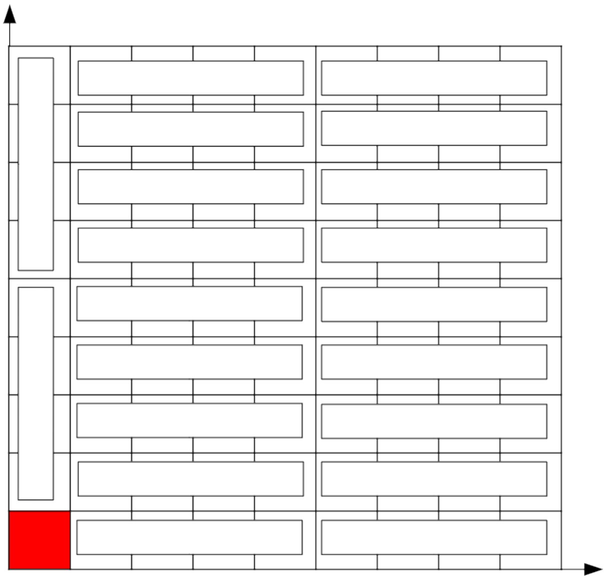
## 4.3. Recherche de minorants

Dans le 1er cas (n=4k), on cherche à déterminer le nombre maximal de plantes pouvant être présentes dans le jardin. Ici, le jardin possédant un côté égal à un multiple de 4 et les plantes couvrant une superficie de 4 sur 1 carreaux, on pourra remplir entièrement le jardin de plantes. En sachant que les plantes occupent chacune quatre carreaux, le nombre maximal de plantes disjointes présentes dans le jardin est de n²/4, soit le nombre de carreaux du jardin divisé par le nombre de carreaux occupés par une seule plante. Cela nous donne donc le nombre maximal de plantes pouvant être présentes dans le jardin. Or, si on peut placer un certain nombre de plantes dans le jardin, on est certain de devoir utiliser au minimum ce même nombre en arrosages. Ainsi, il nous faut au moins n²/4 arrosages, qui est un minorant.



Configuration des plantes dans le 1er cas

Dans le 2e cas (n=4k+1), on cherche à déterminer le nombre maximal de plantes pouvant être présentes dans le jardin. Ici, le jardin possédant un côté égal à la somme d'un multiple de 4 et de 1 et les plantes couvrant une superficie de 4 sur 1 carreaux, on pourra remplir entièrement un carré de côté n=4k avec la méthode vue précédemment. Ainsi, il restera deux rectangles sur les côtés de ce carré de superficie 4k+1 sur 1. On les remplira entièrement de plantes à l'exception de la case commune aux deux rectangles car ils ont une longueur égale à 4k+1. Ainsi, le nombre maximal de plantes pouvant êtres présentes dans le jardin est (n²-1)/4 soit le nombre de cases total moins la case inoccupée sur le nombre de cases occupées par une plante. Cela est donc égal au nombre minimal d'arrosages à réaliser. Donc, (n²-1)/4 est un minorant.



Configuration des plantes dans le
2e cas

Dans le 3e cas (n=4k+2), nous divisons très simplement le jardin en un carré de côté 4k, deux rectangles de longueur 4k et largeur 2, et un carré de côté 2. On sait que le carré de côté 4k ainsi que les deux rectangles seront remplis intégralement, et il nous reste donc l'autre carré, contenant quatre carreaux, qui demeurera inoccupé. On peut donc affirmer qu'il nous faudra au moins $(n^2-4)/4$ arrosages, et c'est donc un minorant.

Configuration des plantes dans le
3e cas

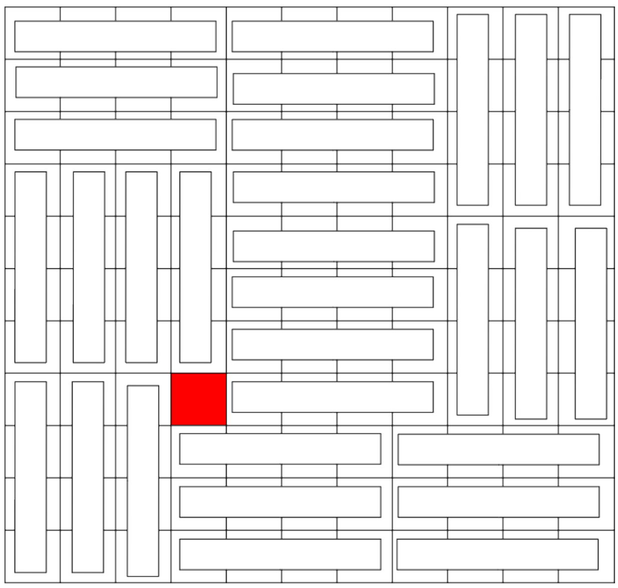
Dans le 4e cas (n=4k+3), nous divisons le jardin encore une fois d'une autre façon.

On commence par retrancher quatre rectangles de largeur 3 et de longueur 4k carreaux, dont les longueurs correspondent aux quatre côtés du jardin (voir schéma ci-dessous). Ces rectangles, quelle que soit leur longueur, seront toujours entièrement remplis de plantes, puisque leur longueur étant un multiple de 4, des plantes de longueur 4 et largeur 1 les couvriront intégralement si on les dispose dans le sens du rectangle qu'elles occupent et en commençant par son bord.

Suite à cette opération, on obtient au centre du jardin, un carré de longueur n-6 carreaux. En effet, en retirant un rectangle de trois carreaux de largeur sur chaque côté du jardin, on enlève six carreaux de la longueur totale de chaque côté (mesurant initialement n carreaux). On peut affirmer que le côté du carré restant au centre sera de 4(k-1)+1 carreaux, car, en enlevant six carreaux de la longueur du côté de 4k+3, on effectue la soustraction: 4k+3-6. Or, 4(k-1+1)+3-6 = 4(k-1)+4+3-6 = 4(k-1)+1.

Ce carré central obtenu, dont le côté est la somme d'un multiple de 4 et de 1, appartient donc au 2e cas, traité antérieurement, et pourra être rempli de plantes de la même façon, en laissant un unique carreau inoccupé.

Ainsi, on peut remplir de plantes disjointes un jardin du 4e cas en laissant un seul carreau de libre. On peut donc affirmer que, une fois de plus, on nécessitera d'au moins $(n^2-1)/4$ arrosages pour couvrir tout le jardin, qui est un minorant pour le 4e cas.



Exemple de configuration avec un
carré de côté n=11

## 4.4. Recherche de majorants

Dans le 1er cas (n=4k), on sépare le jardin en plusieurs carrés de côté 4 cases dans lesquelles on placera quatre arrosages en diagonale. Etant donné que cela entraînera une configuration d'arrosage dans laquelle on retrouve un arrosage toutes les quatre cases (que cela soit horizontalement ou verticalement), une plante PL4 ne pourra pas se trouver dans le jardin sans être arrosée. Ainsi, chaque arrosage se trouvant à quatre carreaux d'intervalle, un majorant sera égal dans ce cas à $n^2/4$.

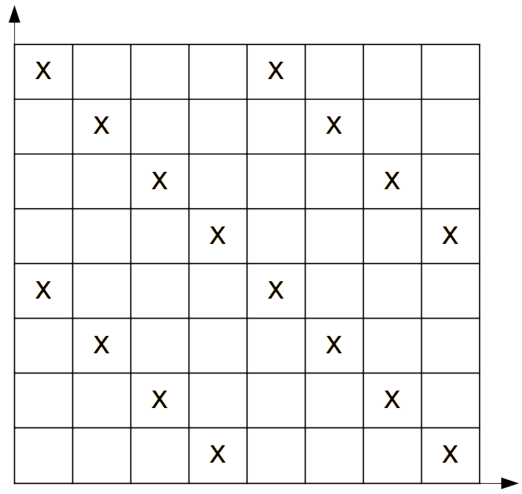



Schéma de disposition des arrosages
dans le 1er cas

Dans le 2e cas (n=4k+1), on optera pour la même configuration. Cependant, avec celle-ci, chaque arrosage sera placé de manière à s'occuper de quatre cases à l'exception d'un arrosage présent pour cinq carreaux. On a donc une case "en trop" dans le jardin. Ainsi, on obtient la formule suivante pour un majorant, $(n^2-1)/4$ soit le nombre de cases total moins la case "en trop".

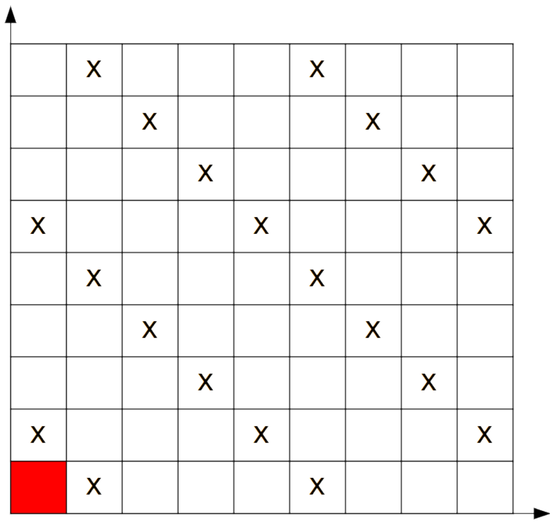


Schéma de disposition des arrosages
dans le 2e cas

Dans le 3e cas (n=4k+2), on optera pour la même configuration. Avec celle-ci, chaque arrosage sera placé de manière à s'occuper de quatre cases. Cependant, quatre cases en carré demeurent sans arrosage mais la configuration empêche qu'une plante soit présente dans ce carré. On a donc quatre cases "en trop" dans le jardin. Ainsi, on obtient la formule pour un majorant suivante, $(n^2-4)/4$ soit le nombre de cases total moins les cases "en trop".

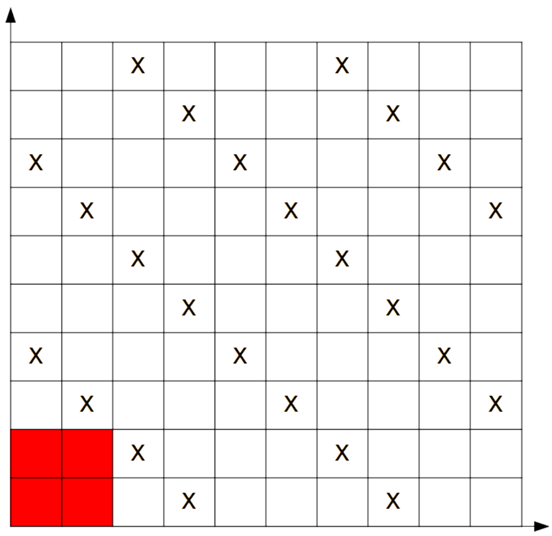



Schéma de disposition des arrosages
dans le 3e cas

Dans le 4e cas (n=4k+3), nous faisons, une fois de plus, des diagonales d'arrosages espacées de trois carreaux entre elles, mais, cette fois-ci, en commençant par placer deux premiers arrosages en diagonale dans les carreaux adjacents de celui en bas à gauche. Avec cette configuration, nous sommes certains qu'aucune plante ne pourrait passer, car les diagonales ainsi disposées occupent toujours un carreau sur trois, aussi bien horizontalement que verticalement.

Pour déterminer le nombre d'arrosages utilisés dans cette configuration, nous séparons les différentes parties du jardin. On commence par en retrancher un carré de côté n-3, adjacent aux côtés haut et gauche du jardin. Ce carré a un côté égal à 4k+3-3 ou 4k carreaux, ce qui signifie qu'il correspond au 1er cas étudié. Par conséquent, il est rempli d'arrosages de la façon expliquée précédemment. Ensuite, on retranche deux rectangles de largeur 3 et longueur 4k carreaux, dont les longueurs correspondent respectivement aux côtés gauche et bas du jardin, de telle sorte qu'il nous reste un groupe de neuf carreaux dans l'angle gauche du bas. Ces figures restantes sont remplies en prolongeant les diagonales du carré déjà retranché antérieurement.

On sait donc que le carré de côté 4k+3 aura un arrosage pour quatre carreaux et un carreau supplémentaire (voir la démonstration pour le majorant du 2e cas). Les rectangles, ayant été remplis en prolongeant les diagonales, auront un arrosage par groupe de quatre carreaux, et le groupe de quatre carreaux restant comportera un arrosage unique.

Ainsi, on a au total un arrosage pour quatre carreaux et un carreau supplémentaire, ce qui nous permet d'affirmer que la méthode explicitée permet de couvrir tout le jardin avec $(n^2-1)/4$ arrosage, qui est un majorant pour le 4e cas.

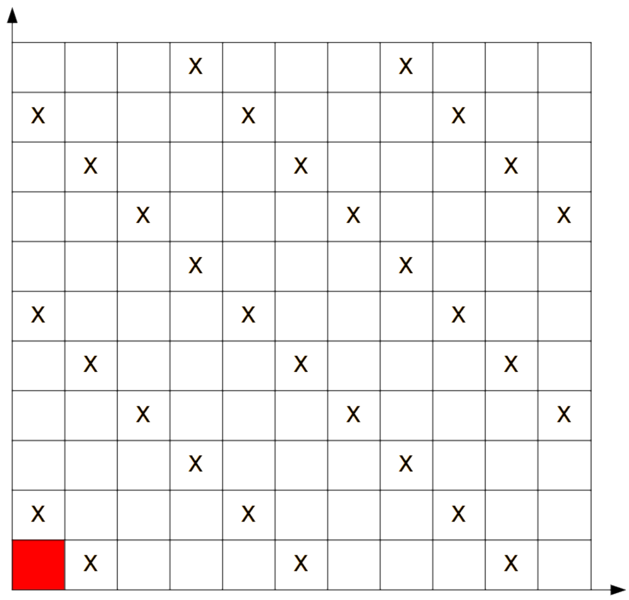


Schéma de disposition des arrosages
dans le 4e cas

# 5. Quatrième situation: jardins carrés avec des plantes angulaires de taille 3 et des plantes linéaires de taille 3

## 5.1. Présentation de la situation

Dans cette situation, nous opérons dans un jardin carré avec un côté de longueur n carreaux (avec $n \geqslant 2$), c'est-à-dire que nous avons nxn = n² carreaux en tout dans le jardin. Dans ce jardin peuvent pousser à la fois des plantes de type PL3 et PA3, pouvant être disposées dans n'importe quel sens (voir définitions dans les présentations des situations précédentes).

## 5.2. Description des deux cas étudiés

Pour cette situation, on distingue deux cas, en fonction de la configuration du jardin étudié, sur lesquels s'appuie notre démarche :

Le premier cas correspond au jardin de côté n, avec n multiple de 2 donc n pair (on dit que $n=2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$). Par exemple, il s'agit du jardin de côté n=2 (avec k=1) ou n=4 (avec k=2).

Le second cas correspond au jardin de côté n, avec n la somme d'un multiple de 2 et de 1 donc n impair (on dit que $n=2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$). Par exemple, il s'agit du jardin de côté n=3 (avec k=1) ou n=5 (avec k=2).

## 5.3. Recherche de minorants

Dans cette situation, on réutilisera les carrés de côté 2 pour trouver les minorants, utilisés précédemment dans la deuxième situation.

Dans le 1er cas (n=2k), on remplit le jardin de carrés 2x2 exactement comme dans le 1er cas de la situation précédente. On obtient donc le même minorant: n²/2.

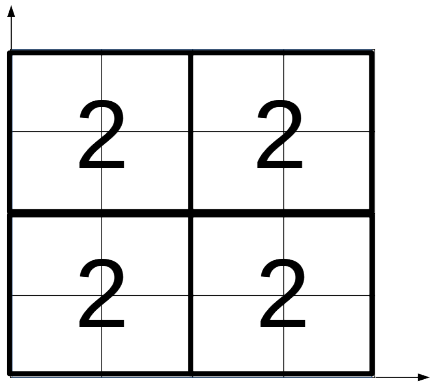


Schéma de disposition des carrés
dans le 1er cas

Dans le 2e cas (n=2k+1), le meilleur minorant qu'on ait trouvé correspond à celui de la section 3.2, obtenu grâce à la "double pyramide". Il s'agit donc de (n²-n)/2.

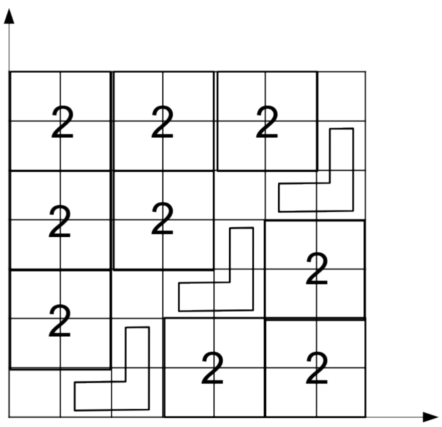
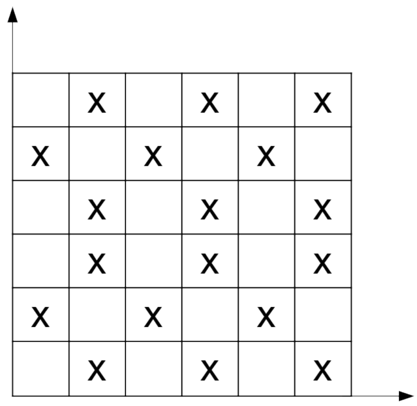


Schéma de disposition des carrés et
plantes dans le 2e cas

## 5.4. Recherche de majorants

Dans le 1er cas (n=2k), on dispose les arrosages en colonnes, comme dans la deuxième situation, mais on déplace un arrosage sur trois d'un rang, comme présenté sur le schéma ci-dessous.

De cette façon, aucune PA3 ne peut passer, car on n'a jamais d'espace de plus d'un carreau sur une ligne horizontale, et aucune PL3 ne peut passer car on n'a jamais d'espace de plus de deux carreaux adjacents, ni verticalement, ni horizontalement. De cette façon, puisqu'on ne fait que décaler certains arrosages, sans en enlever ou ajouter, on aura, comme dans la section 3.1, n²/2 arrosages. On retrouve ainsi la valeur du minorant, et il s'agit donc de la valeur optimale.



Configuration des arrosages dans
le 1er cas

Dans le 2e cas (n=2k+1), la méthode de disposition reste la même, mais on veille toujours à remplir les colonnes en commençant par la 2e, et on ne décale un arrosage sur trois qu'à partir du 3e rang, afin d'en utiliser le minimum (voir schéma).

De cette façon, aucune PA3 ne peut passer, car on n'a jamais d'espace de plus d'un carreau sur une ligne horizontale, et aucune PL3 ne peut passer car on n'a jamais d'espace de plus de deux carreaux adjacents, ni verticalement, ni horizontalement. Cependant, ici, la configuration n'est pas similaire à celle de la section 3.2, car on a des arrosages en plus du fait du décalage de certains d'entre eux. Nous savons tout de même que, si on retranche la dernière colonne du jardin, on obtient un rectangle dont la moitié des carreaux peut s'appeler être remplie d'arrosages, car la largeur étant n-1, il s'agit d'un nombre pair. Ce rectangle comportera (n-1)n carreaux en tout, ou $n^2$-n (donc ($n^2$-n)/2 arrosages), et la colonne retranchée, avec un arrosage tous les 3 carreaux, en comportera la partie entière de n/3. Un majorant serait donc ($n^2$-n)/2+partie_entière_de(n/3), mais il ne rejoint pas de minorant car nous n'avons pas déterminé de méthode universelle pour ce cas.

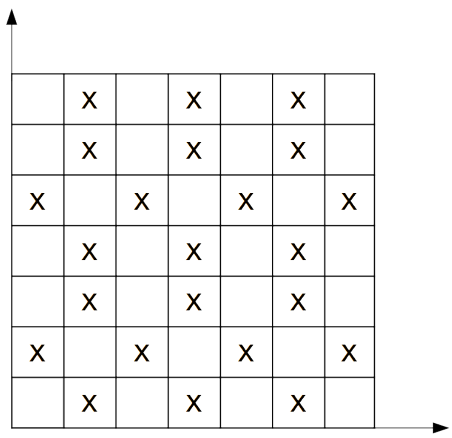


Schéma de disposition des arrosages
dans le 2e cas

# 6. Conclusion

## 6.1. Les résultats obtenus

| Situation étudiée (type de plantes dans le jardin carré) | Plantes linéaires de taille 3 | Plantes angulaires de taille 3 | Plantes linéaires de taille 4 | Plantes linéaires ou angulaires de taille 3 |
|---|---|---|---|---|
| Solution optimale en fonction du cas | - Jardin de côté $n=3k$: $OPT=n^2/3$<br><br>- Jardin de côté $n=3k+1$: $OPT=(n^2-1)/3$<br><br>- Jardin de côté $n=3k+2$: $OPT=(n^2-1)/3$ | - Jardin de côté n pair: $OPT=n^2/2$<br><br>- Jardin de côté n impair: $OPT=(n^2-n)/2$ | - Jardin de côté $n=4k$: $OPT=n^2/4$<br><br>- Jardin de côté $n=4k+1$: $OPT=(n^2-1)/4$<br><br>- Jardin de côté $n=4k+2$: $OPT=(n^2-4)/4$<br><br>- Jardin de côté $n=4k+3$: $OPT=(n^2-1)/4$ | - Jardin de côté n pair: $OPT=n^2/2$<br><br>- Jardin de côté n impair: $(n^2-n)/2 \leqslant OPT \leqslant (n^2-n)/2+$partie entière de n/3 |

## 6.2. Les ouvertures et généralisations possibles

Nous pourrions compléter le problème du jardin mixte n'ayant pas trouvé de solution optimale pour les jardins impairs (sauf pour certains cas).
Nous pourrions aussi trouver une méthode de résolution générale pour toutes les plantes PL, ayant remarqué qu'on retrouvait des carrés dans le nombre de cases inoccupées. Ainsi, les jardins 4k+1 ont une case inoccupée et les jardins 4k+2 en ont quatre. Les jardins 5k+1 en ont une, les jardins 5k+2 quatre et les jardins 5k+3 en ont quatre. Les jardins 6k+1 ont une case inoccupée, les 6k+2 en ont quatre, les 6k+3 en ont neuf et les 6k+4 en ont quatre. Comme 5k+3 équivaut à 5k-2 et 6k+4 équivaut à 6k-2, on peut conjecturer que le nombre de cases inoccupées est le carré des cases en excès ou en défaut dans un jardin carré.

Notes d'édition

Il semble qu'une hypothèse implicite est faite : on souhaite placer un maximum de plantes sur la grille. Si ce n'est pas le cas, alors trivialement le nombre minimum est 1 (ou 0).

Par ailleurs, dans le cas d'étude où il y a à la fois des formes « droites » et des formes « en L » il pourrait y avoir un facteur ou une règle qui explique la répartition du nombre de formes d'un type par rapport aux formes de l'autre type.