

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

# Pavage de rectangles avec des carrés et drôles de fractions

Année 2024/2025

**Elèves** : Romane Deboeuf, Lennie Fleuret, Nayeli Hassler, élèves de 3ème/4ème  
Daria Yudkina, Romane Pouzoulet, Siloe Bordage Puel, Théa Fleuret, Elie Louge, élèves de 1ère/Terminale  
Ana Paula Amezquita, Javier Gomez, Isabella Quiñónez, élèves de Terminale

**Établissements** : Lycée Raymond Savignac, Villefranche de Rouergue,  
Collège George Pompidou, Cajarc,  
Lycée Jules Verne, Guatemala.

**Enseignants** : Philippe Labit, Arnaud Bédurier, Sandrine Vernhet, Laurent Thomas, Lionel Astruc.

**Chercheuse** : Martine Klughertz, IRES - Université Paul Sabatier, Toulouse

## 1. Introduction

« Pavage de rectangle avec des carrés et drôles de fractions » est un sujet de recherches mathématiques qui nous a été proposé à la rentrée 2024 par Martine Klughertz. Tout au long de nos recherches, nous avons travaillé conjointement entre les élèves du Lycée Raymond Savignac, du Lycée Jules Verne et du collège Pompidou. Nous avons organisé plusieurs séminaires entre collégiens et lycéens au cours de l'année, dans le but de mettre en commun nos recherches et nos avancées. Nous sommes finalement allés présenter notre travail lors du congrès MATH.en.JEANS à Alès le 10 et 11 avril 2025.

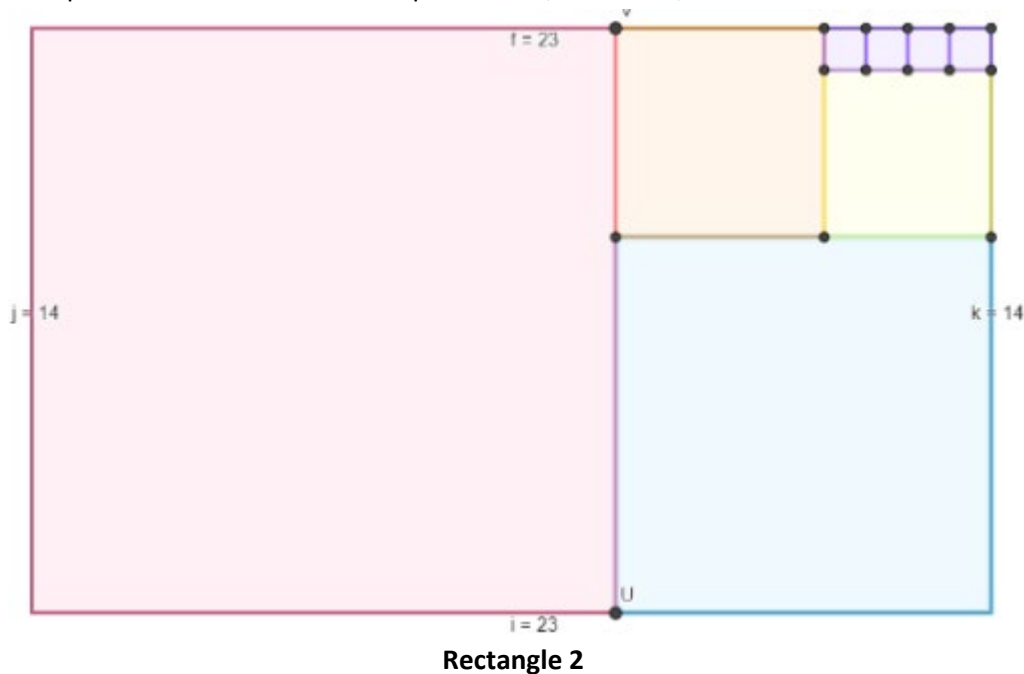
## 2. Présentation du sujet

Notre sujet consiste à prendre un rectangle avec certaines dimensions, puis le paver avec des carrés du plus grand possible jusqu'au plus petit. Et enfin, à transformer ce pavage en fraction continue. Et à l'inverse prendre une fraction continue et retrouver les dimensions du rectangle pavé qui correspond.

### 3. Nos premiers essais

#### 3.1. Avec des nombres entiers comme dimensions du rectangle

Nous avons commencé par essayer avec un rectangle de mesures prises au hasard qui étaient 23x14, nous l'avons pavé avec un carré de 14x14 puis de 9x9, un de 5x5, de 4x4 et 4 carrés de 1x1 .



##### 3.1.1 Calcul de l'aire du rectangle

Étant-donné que ce sont des carrés, nous avons cherché à calculer l'aire du rectangle en passant par l'aire des carrés.

Nous écrivons l'aire du rectangle comme la somme des aires des carrés :

$$23 \times 14 = 1 \times (14 \times 14) + 1 \times (9 \times 9) + 1 \times (5 \times 5) + 1 \times (4 \times 4) + 4 \times (1 \times 1)$$

Les coefficients correspondaient à chaque nombre de carrés différents dans le rectangle (1)

Avec ces coefficients nous avons fait une liste de coefficients : [1;1;1;1;4]

### 3.1.2 Transformation de la fraction de base en fraction continue

$$\frac{23}{14} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$$


---

Pour passer de la fraction de base (celle de gauche) à la fraction continue (celle de droite). Voici les étapes :

$$\frac{23}{14} = 1 + \frac{9}{14}$$

Pour la première étape il faut trouver combien de fois il y a 14 dans 23. Il y a 1 fois 14 et il reste 9, et on écrit le nombre comme la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

$$= 1 + \frac{1}{\frac{14}{9}}$$

Pour la deuxième étape nous allons faire l'inverse de l'inverse de la fraction donc l'inverse de  $1 + \frac{14}{9}$ . Car il faut que la longueur soit toujours au numérateur.

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{5}{9}}$$

Il faut ensuite trouver combien de fois il y a 9 dans 14. Il y a 1 fois 9 et il reste 5, ainsi de suite...

A la fin on retrouve bien la fraction continue.

$$: 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$$

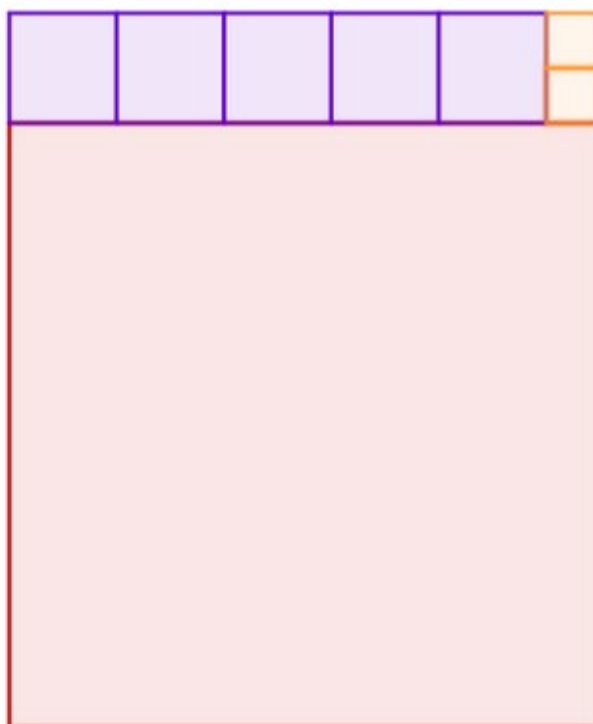
Les nombres à gauche d'une fraction correspondent aux nombres de carrés qui pavent le rectangle.

(2)

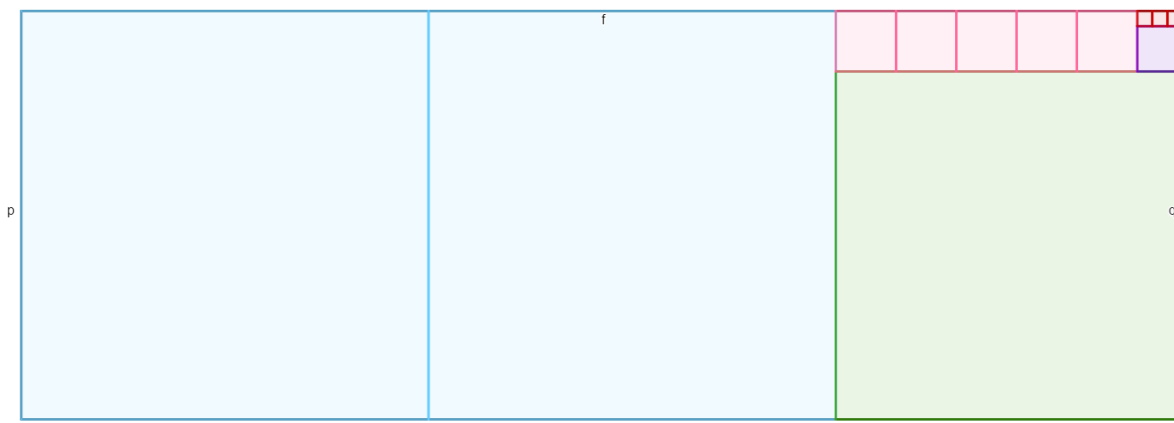
### 3.2. Avec des nombres décimaux comme dimensions du rectangle

Pour essayer avec des nombres décimaux il faut d'abord multiplier les mesures du rectangle de façon à obtenir un entier. Par exemple pour un rectangle de dimensions 1,3 x 1,1 nous avons fait :

$$\frac{1,3}{1,1} = \frac{1,3 \times 10}{1,1 \times 10} = \frac{13}{11} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}$$



### 3.3. Avec des nombres rationnels comme dimensions du rectangle



$$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{9}{11}} = \left(\frac{7}{3}\right) \times \left(\frac{11}{9}\right) = \frac{77}{27} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

Nous pouvons voir que ça fonctionne car en multipliant  $7/3$  par l'inverse de  $9/11$  cela donne  $77/27$ , et à partir de cette fraction nous avons trouvé la fraction continue.

Ensuite pour calculer l'aire nous sommes repassés par les fractions d'origine.

$$\frac{7}{3} \times \frac{9}{11} = 2 \times \left(\frac{9}{11} \times \frac{9}{11}\right) + 1 \times \left(\frac{23}{33} \times \frac{23}{33}\right) + 5 \times \left(\frac{4}{33} \times \frac{4}{33}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{11} \times \frac{1}{11}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{99} \times \frac{1}{99}\right)$$

### 4. Calcul des dimensions du rectangle à partir de la fraction décomposée (Algorithme d'Euclide)

Nous avons cherché à retrouver la fraction de base à partir des coefficients de cette fraction. Pour cela, plusieurs étapes :

- On place les coefficients : (3)

...=1x...+...  
 ...=1x...+...  
 ...=1x...+...  
 ...=1x...+...  
 ...=4x...+...

On suppose que la taille du carré de la dernière ligne est de 1, le reste étant forcément nul.  
On trouve donc le côté, qu'on place

$$\begin{aligned} & \dots = 1x \dots + \dots \\ & \dots = 1x \dots + \dots \\ & \dots = 1x \dots + \dots \\ & \dots = 1x \dots + \dots \\ & \dots = 4x1 + 0 \end{aligned}$$

A partir de là, on trouve la ligne du dessus en prenant les valeurs de la ligne inférieure

- la taille devient le reste ;
- le côté devient la taille.
- On trouve le côté suivant

$$\begin{aligned} & \dots = 1x \dots + \dots \\ & \dots = 1x \dots + \dots \\ & \dots = 1x \dots + \dots \\ & 5 = 1x4 + 1 \\ & 4 = 4x1 + 0 \end{aligned}$$

On recommence jusqu'à avoir complété toutes les lignes.

$$\begin{aligned} 23 &= 1x14 + 9 \\ 14 &= 1x9 + 5 \\ 9 &= 1x5 + 4 \\ 5 &= 1x4 + 1 \\ 4 &= 4x1 + 0 \end{aligned}$$

## 5. Démonstrations

### 5.1. Avec des nombres naturels $n \in \mathbb{N}$

Soit  $a, b$  deux entiers naturels non nuls.

On cherche à démontrer qu'on peut toujours paver un rectangle de dimension  $a * b$  avec un nombre fini de carrés dont les côtés sont des entiers naturels non nuls.

On définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $u_{n+2}$  est le reste de la division euclidienne de  $u_n$  par  $u_{n+1}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(u_n)$  est décroissante ( par définition du reste par l'algorithme d'Euclide) et minorée par 0

On veut démontrer par l'absurde que  $(u_n)$  converge vers 0. On suppose que  $(u_n)$  converge vers  $l \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $l \neq 0$  on peut refaire une division euclidienne et trouver un reste  $l' < l$ . Cela contredit notre hypothèse initiale. Donc  $(u_n)$  converge vers 0.

On admet que lorsque le reste est nul, cela veut dire que le rectangle est complètement pavé avec des carrés.

$(u_n)$  converge vers 0 donc tout rectangle de côtés naturels peut être pavé. (4)

## 5.2. Avec des nombres rationnels

Soit  $a, b \in \mathbb{Q}^*$   $a < b$  et  $\frac{c}{d} = a$  et  $\frac{e}{f} = b$

$\frac{a}{b} = \frac{cf}{ed}$  puisque le produit de deux entiers naturels est un naturel  $cf, ed \in \mathbb{N}^*$

donc on peut utiliser la démonstration précédente pour prouver que cela est bien possible. (5)

De la même façon, on peut le démontrer pour la somme et le quotient de  $a$  et  $b$ .

En effet,  $\frac{c}{a} + \frac{e}{b} = \frac{cf+de}{df}$  où  $cf + de \in \mathbb{N}^*$

Enfin,  $\frac{c}{a} \div \frac{e}{b} = \frac{cf}{de}$  où  $cf \in \mathbb{N}^*$  et  $de \in \mathbb{N}^*$ .

Donc tout rectangle de côtés rationnels peut être pavé.

## 5.3. Avec des nombres irrationnels. $\frac{a}{b}$

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres irrationnels (c'est à dire  $a \neq \frac{c}{d}$  et  $b \neq \frac{e}{f}, \forall c, d, e, f \in \mathbb{N}^*$ ).

Si on a  $a$  et  $b$  deux irrationnels non proportionnels et non nuls, le quotient  $\frac{a}{b}$  reste irrationnel

Démonstration:

Soient  $x$  et  $y$  deux irrationnels non proportionnels (6)

Supposons que  $\frac{x}{y} = r$  où  $r$  est rationnel, cela implique  $x = ry$ , ce que contredit notre supposition initiale donc  $y$  est un irrationnel.

Si  $a$  et  $b$  sont deux irrationnels proportionnels non nuls à coefficient rationnels,  $\frac{a}{b}$  va être égal au coefficient donc sera rationnel. (7)

Si le coefficient est irrationnel,  $\frac{a}{b}$  reste irrationnel.

Donc lorsque  $\frac{a}{b}$  reste irrationnel, on ne peut pas décomposer car sinon  $\frac{a}{b}$  pourrait être décomposé sous forme de fraction continue finie ce qui est absurde.

Donc dans le cas des irrationnels on ne peut compléter le pavé que lorsque les deux côtés sont proportionnels au coefficient rationnel, sinon ça serait infini.

**Exemple:** rectangle qui a pour dimensions le nombre d'or et 1

On sait que le nombre d'or ( $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ) est une solution de l'équation  $\phi^2 - \phi + 1 = 0$ .

$$\text{or, } \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi^2 = \phi + 1$$

$$\Leftrightarrow \phi = \frac{1}{\phi} + 1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}} \dots$$

Ainsi, la fraction continue du nombre d'or sera infinie. Cela signifie qu'un rectangle qui a pour dimensions le nombre d'or et 1 ne pourra jamais être pavé entièrement par des carrés. (8)

## 6. Essai de généralisation

Ensuite, nous avons essayé de généraliser avec des lettres. Nous sommes partis de trois listes de coefficients, une avec 3, une avec 4 et une avec 5 entiers quelconques puis nous avons écrit la fraction continue. En mettant au fur et à mesure sur le même dénominateur, on est remonté jusqu'aux dimensions du rectangle dans le but de trouver une formule de récurrence qui nous permettrait d'avoir les dimensions sans calcul depuis la fraction continue avec n'importe quelle longueur de la liste de coefficients.

Ainsi, nous avons repéré des similarités mais pas assez pour en déduire une formule qui fonctionnerait à chaque fois.

Cependant, nous avons pu observer que la fraction continue de, par exemple, un rectangle avec une liste de 3 coefficients peut se retrouver à l'avant dernière étape pour remonter aux dimensions d'un rectangle avec une liste de 4 coefficients.

### 6.1 Méthode généralisée

Technique de décomposition pour obtenir les longueurs des carrés : (9)

rectangle :  $x * y$

$$x = u_0 * y + r_0$$

$$\Rightarrow y = u_1 * r_0 + r_1$$

$$\Rightarrow r_0 = u_2 * r_1 + r_2$$

$$\Rightarrow r_1 = \dots$$

Construire une fraction continue de  $x/y$ , grâce à la décomposition :

fraction continue :

$$\frac{x}{y}$$

$$= u_0 + \frac{r_0}{y}$$

$$= u_0 + 1 / \left( \frac{y}{r_0} \right)$$

$$= u_0 + 1 / \left( u_1 + \frac{r_1}{r_0} \right)$$

## 6.2 Application de la décomposition pour un rectangle de 1 par le nombre d'or

Voici le début de la décomposition d'un rectangle de 1 par le nombre d'or  $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$  :

$$\text{rectangle: } 1 * \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 * 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{donc } r_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$1 = 1 * \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \frac{-\sqrt{5}+3}{2} \quad \text{donc } r_1 = \frac{-\sqrt{5}+3}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 1 * \left(\frac{-\sqrt{5}+3}{2}\right) + \frac{2\sqrt{5}-4}{2}$$

$$\text{donc } r_2 = \frac{2\sqrt{5}-4}{2} = r_0 - r_1$$

$$\left(\frac{-\sqrt{5}+3}{2}\right) = 1 * \left(\frac{2\sqrt{5}-4}{2}\right) + \frac{-3\sqrt{5}+7}{2}$$

$$\text{donc } r_3 = \frac{-3\sqrt{5}+7}{2} = r_1 - r_2$$

## 6.3 Essai d'une suite pour la décomposition du nombre d'or

On s'aperçoit que pour trouver les différentes longueurs de carrés, que l'on fait grâce à la décomposition, il y a une suite par récurrence. En effet, si l'on part des 2 premières longueurs et que l'on veut trouver la 3ème, il nous suffit de soustraire la seconde longueur à la première.

On peut donc écrire cette suite de récurrence d'ordre 2 :

$$r_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$r_1 = \frac{-\sqrt{5}+3}{2}$$

$$r_{n+2} = r_n - r_{n+1}$$

Au début, on a l'impression que la suite fonctionne tout à fait...

Quand on la tape sur une machine tout commence bien, la suite est décroissante et converge vers 0. Les longueurs des carrés sont donc de plus en plus petites ; tout va bien.

Mais au bout d'un certain temps, on s'aperçoit que la suite commence à diverger d'une valeur négative à une valeur positive de plus en plus grande. La suite n'a plus aucun sens. Elle ne fonctionne donc pas, ou du moins qu'un certain temps.

La seule explication que nous avons pu trouver, est qu'il y est plusieurs carrés de la même taille (donc un coefficient différent (représenté en rouge précédemment)), ce qui fausserait toute la suite. Nous ne sommes donc pas allés plus loin sur cette suite...

## 7. Programmes Python

Nous avons réalisé deux programmes Python.

Le premier programme, « décomposition », trouve une liste de coefficients à partir d'une fraction représentant les côtés d'un rectangle. Pour cela, nous avons utilisé l'algorithme d'Euclide. [\(10\)](#)

```
>>> decomposition(17,10)
a = 17 b = 10 q = 1
a = 10 b = 7 q = 1
a = 7 b = 3 q = 2
a = 3 b = 1 q = 3
[1, 1, 2, 3]
>>> |
```

Le deuxième programme, « trouver deux nombres », permet de retrouver la fraction d'origine qui représente les côtés du rectangle, en utilisant la liste de coefficients comme argument. Il est l'opposé du premier. Pour le réaliser, nous avons utilisé l'algorithme inverse, décrit précédemment.

```
>>> trouver_deux_nmbre([1, 1, 2, 3])
3 = 3 * 1
7 = 2 * 3 + 1
10 = 1 * 7 + 3
17 = 1 * 10 + 7
Fraction:
'17/10'
```

### 5.3. Avec des nombres irrationnels.

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres irrationnels (c'est à dire  $a \neq \frac{cd}{ef}$  et  $b \neq \frac{gh}{ij}$ ,  $\forall c,d,e,f \in \mathbb{N}^*$ ).

Si on a  $a$  et  $b$  deux irrationnels non proportionnels et non nuls,  $a$  et  $b$  restent irrationnels.

Démonstration:

Soient  $x$  et  $y$  deux irrationnels non proportionnels

supposons que  $x = r$  où  $r$  est rationnel.

cela implique  $x = ry$ , ce que contredit notre supposition initiale donc  $xy$  est un irrationnel.

Si on a  $b$  et  $a$  deux irrationnels proportionnels non nuls à coefficient rationnels,  $ab$  va être égal au coefficient donc sera rationnel.

Si le coefficient est irrationnel,  $ab$  reste irrationnel.

Donc lorsque  $ab$  reste irrationnel, on ne peut pas décomposer car sinon  $ab$  pourrait être décomposé sous forme de fraction continue finie ce qui est absurde.

Donc dans le cas des irrationnels on ne peut compléter le pavé que lorsque les deux côtés sont proportionnels au coefficient rationnel, sinon ça serait infini.

**Exemple:** rectangle qui a pour dimensions le nombre d'or et 1

On sait que le nombre d'or ( $\varphi=1+\sqrt{5}$ ) est une solution de l'équation  $\varphi^2-\varphi+1=0$ .

or,  $\varphi^2-\varphi-1=0$

$\Leftrightarrow \varphi^2=\varphi+1$

$\Leftrightarrow \varphi=1\varphi+1=1+1+1\varphi=1+1+1+1\varphi\dots$

Ainsi, la fraction continue du nombre d'or sera infinie. Cela signifie qu'un rectangle qui a de dimension le nombre d'or et 1 ne pourra jamais être pavé entièrement par des carrés.

## 6. Essai de généralisation

Ensuite, nous avons essayé de généraliser avec des lettres. Nous sommes partis de trois listes de coefficients, une avec 3, une avec 4 et une avec 5 entiers quelconques puis nous avons écrit la fraction continue. En mettant au fur et à mesure sur le même dénominateur, on est remonté jusqu'aux dimensions du rectangle dans le but de trouver une formule de récurrence qui nous

---

### Notes d'édition

- 1 Plus précisément, le coefficient ( devant une parenthèse ) correspond au nombre de carrés différents dans le rectangle (ayant les dimensions données entre parenthèses)
- 2 Le nombre 4 qui n'est à gauche d'aucune fraction, correspond lui aussi au nombre de carrés d'une certaine dimension, ici  $1 \times 1$ , apparaissant dans le pavage.
- 3 Il s'agit des coefficients du premier exemple.
- 4 Il manque la définition des premiers termes. La relation de récurrence définit  $U_{n+2}$  en fonction des deux termes précédents.  
Pour que  $U_n$  soit complètement définie, il manque  $U_0$  et  $U_1$   
Il aurait fallu préciser : cherche-t-on encore à paver avec des côtés ayant pour longueur un nombre entier. Ou encore à quels entiers on réappliquerait la démonstration précédente.
- 5 On aurait pu préciser la définition de « non proportionnel » (  $a$  et  $b$  sont proportionnels si  $a/b$  )  
Il aurait été souhaitable de parler de « coefficient de proportionnalité »
- 6 On aurait pu préciser la définition de « non proportionnel »
- 7 Quel est le raisonnement derrière cette conclusion ?
- 8 S'agit-il d'Euclide ? auquel cas il ne s'applique qu'à des entiers.  
Ou bien s'agit-il d'un autre algorithme ?
- 9 Il s'agit de la liste des coefficients de la fraction continue correspondant au ratio des dimensions du rectangle.
- 10 Il s'agit de la liste des coefficients de la fraction continue correspondant au ratio des dimensions du rectangle.