Pavages avec tuiles et matrices

Lisa Alexandre, Thomas Cabon–Beauregard, Alban Firaux, Werner Jantzem, Youenn Le Faucheur, Romain Martineau, Lilou Rosec-Després, Louis Salmon-Le Guellec, Achille Soquet, Ambroise Taleb,

classes de Seconde et Terminale

Année 2024-2025

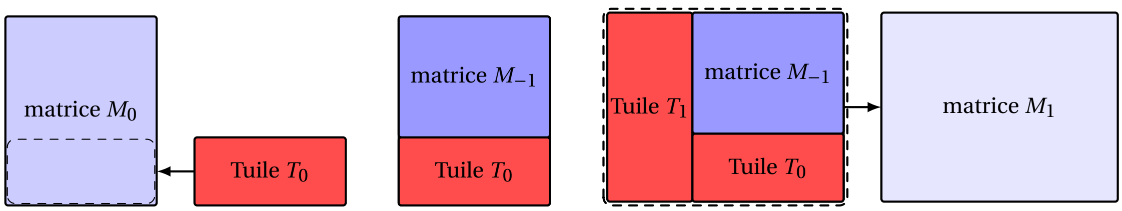
Établissement : Lycée de l'Harteloire, Brest
Enseignant : Jean-marie Gourmelon
Chercheur : Stéphane Rioual, Université de Bretagne Occidentale

1 Présentation du sujet

Un pavage du plan est obtenu en recouvrant par des « tuiles », choisies dans un ensemble fini, toutes les régions du plan sans laisser de trou et sans que deux tuiles se recouvrent. Certains pavages sont célèbres, tels ceux créés par *Maurits Cornelis Escher* ou *Roger Penrose*. On peut envisager des pavages utilisant un nombre infini de tuiles différentes mais en se donnant néanmoins des contraintes. Nous nous intéresserons à des pavages infinis du plan par des tuiles rectangulaires selon le principe décrit ci-après.

On considère deux familles de rectangles possédant les mêmes formes, que nous qualifierons respectivement de « tuiles » et de « matrices ». Chaque tuile doit s'insérer dans une matrice en y laissant un espace rectangulaire de même forme que la matrice.

Exemple : Considérons la matrice M_0 définie par les dimensions 8 cm et 10 cm. La tuile T_0 de dimensions 3,6 cm et 8 cm s'y insère en y laissant un espace M_{-1} de dimensions 6,4 cm et 8 cm et on constate bien que M_{-1} est une réduction de M_0 . Inversement, on peut compléter cette matrice M_0 par la tuile T_1 de dimensions 4,5 cm et 10 cm pour créer la matrice M_1 de dimensions 10 cm et 12,5 cm ; M_1 et T_1 sont alors bien des agrandissements de M_0 et T_0.



On pourra se poser les questions suivantes :

1. Le procédé peut-il se poursuivre à l'infini dans toutes les directions et dans les deux sens en prenant des tuiles de plus en plus petites ou de plus en plus grandes ?

2. À chaque matrice correspond-t-il une tuile ? À chaque tuile une matrice ? Le cas échéant, y a-t-il unicité ?
3. Y a-t-il des cas particuliers intéressants ? Le procédé peut-il s'étendre à d'autres polygones que des rectangles ?
4. Peut-on imaginer un procédé analogue pour paver l'espace à partir d'une matrice qui serait alors un pavé droit de dimensions quelconques ?

2 Résultats

Les pavages rectangulaires sont définis par une tuile et une matrice rectangulaire. Nous avons prouvé qu'il existe une tuile pour toute matrice non carrée, et qu'on peut associer deux matrices différentes à une tuile. Nous avons aussi montré qu'il existe deux pavages avec des matrices aux proportions remarquables qui sont $\sqrt{2}$ et le nombre d'or ϕ.

Nous avons aussi travaillé sur des pavages avec tuiles et matrices triangulaires. Nous avons démontré qu'il existe un pavage avec pour matrice tout triangle isocèle ayant un angle principal supérieur à 60°. De plus il y a un pavage avec tuile et matrice de même forme, les triangles sont alors isocèles rectangles avec un coefficient d'agrandissement de $\sqrt{2}$.

Pour les pentagones il n'existe pour l'instant qu'un seul pavage, où il y a trois angles droits et deux angles à 135°. Nous avons aussi montré qu'un découpage en tuile et matrice de même forme est impossible.

Enfin, pour les hexagones, nous avons trouvé la forme en "L" qui permet de paver le plan avec une infinité de possibilités. Elle se caractérise par trois variables x, y et t indépendantes qui définissent la longueur de ses côtés. Pour cette forme en "L" le découpage en tuile et matrice de même forme est possible avec pour fixé $x = 1$, $y = t^3$ et $t = \sqrt{\frac{1}{\phi}}$.

3 Pavages rectangulaires

Nos premières recherches nous ont conduits à explorer les possibilités de pavage à partir de l'exemple donné : un programme en Scratch nous a convaincu que le pavage est possible dans les deux sens et dans toutes les directions.

Les tuiles peuvent se placer à côté de la matrice pour ainsi former un agrandissement de la matrice. On peut procéder à cet enchaînement à l'infini. Un autre enchaînement existe, mais cette fois-ci, la matrice de base subit une réduction : la tuile s'insère alors dans la matrice mais dans ce sens un point ne sera jamais recouvert dans le plan, ce qui explique la possibilité de reproduire cet enchaînement à l'infini.

Ce point est le centre de l'homothétie qui permet de passer d'un rectangle à un autre disposé dans le même sens que le premier (par exemple ABCD et A'B'C'D' sur la FIGURE 1 (1)).

Les coefficients de réduction et d'agrandissement des tuiles et matrices aux suivantes sont définis par les dimensions L et l de la matrice : ces coefficients sont respectivement $\frac{l}{L}$ et $\frac{L}{l}$.

Le problème restait pour la possibilité de faire le pavage avec d'autres rectangles. On s'est rendu compte qu'une matrice carrée est impossible car le rectangle restant en recouvrant une partie par une tuile ne peut plus alors être un carré. Mais peut-on trouver une tuile qui convient à une matrice rectangulaire donnée ?

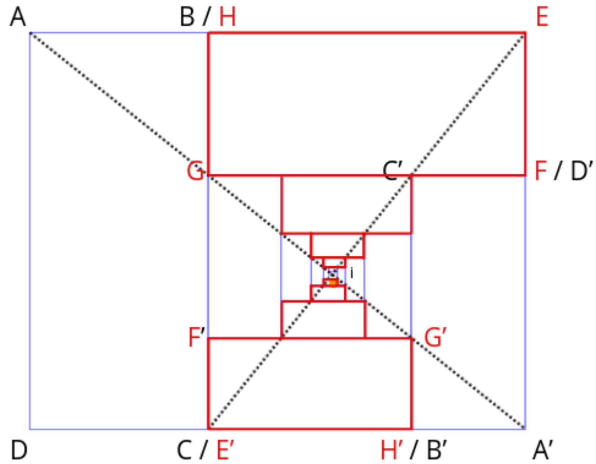


FIGURE 1 –

3.1 Existence d'une tuile pour chaque matrice non carrée

Théorème 1 : Pour toute matrice de dimensions l et L avec $l < L$, il existe une tuile de dimensions :

$$L \quad \text{et} \quad x = \frac{L^2 - l^2}{l}$$

Preuve : Soit une matrice de dimensions l et L connues avec $l < L$. On cherche la dimension x à ajouter à l pour former une tuile qui, adjointe à la matrice, forme une nouvelle matrice de dimensions L et $l + x$.

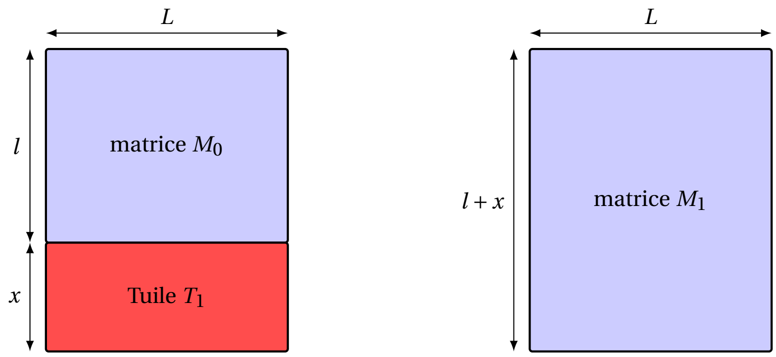


FIGURE 2 – Tuile et matrice rectangulaires

Cela se traduit par l'égalité suivante :

$$\frac{l}{L} = \frac{L}{l+x} \qquad \text{avec } (l\,;\,L\,;\,x) \in \mathbb{R}^{3+*}.$$
$$\Leftrightarrow l + x = \frac{L^2}{l}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{L^2 - l^2}{l} > 0$$

Ainsi il existe une tuile valide pour toute matrice. □

3.2 Existence d'une matrice pour chaque tuile

Théorème : Pour toute tuile de dimensions l et L(2), il existe une matrice et ses dimensions sont pour un côté, l et pour l'autre $x = \dfrac{-L+\sqrt{L^2+4l^2}}{2}$.

Preuve : Soit une tuile de dimensions L et l connues. On cherche la dimension x à ajouter à L pour former une matrice de dimensions l et $x+L$ de même forme que la matrice que l'on crée de dimension x et l. Cela se traduit par l'égalité suivante :

$$\frac{x}{l} = \frac{l}{(L+x)} \text{ avec } (l\,;\,L\,;\,x) \in \mathbb{R}^{3+*}.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + L \times x = l^2$$

On obtient un polynôme du second degré avec comme inconnue x :

$$\Leftrightarrow x^2 + L \times x - l^2 = 0$$

$$\Delta = L^2 - 4(-l^2)$$

$$\Delta = L^2 + 4l^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-L-\sqrt{\Delta}}{2} \qquad x_2 = \frac{-L+\sqrt{\Delta}}{2}$$

x est forcément positif car on cherche une longueur

$$\text{Donc } x = \frac{-L+\sqrt{\Delta}}{2}$$

Pour que cela soit valide quelle que soit la tuile, il faut que x soit positif pour tout L et l.

$$\text{Or } -L+\sqrt{L^2} = 0 \quad \text{Donc} -L+\sqrt{L^2+4l^2} > 0$$

Ainsi, on peut donc trouver une matrice pour n'importe quelle tuile. De plus, il n'y a aucune relation entre L et l ce qui signifie qu'on peut inverser les deux variables dans les calculs et obtenir une autre solution. Il y a donc deux matrices pour chaque tuile, une dans le sens de la longueur et une dans le sens de la largeur. □

3.3 Cas particuliers : proportions remarquables

Théorème : Il existe un unique pavage rectangulaire avec tuiles et matrices identiques, dans ce cas :

$$L = \sqrt{2} \times l.$$

Preuve : Soit M_0 de dimensions l et L. Si la tuile et la matrice sont identiques, la tuile a elle aussi pour dimensions l et L. On cherche le rapport entre l et L tel que la matrice suivante ait pour dimensions

L et $2l$. On obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{l}{L} &= \frac{L}{2l} \\ \Leftrightarrow l^2 &= \frac{L^2}{2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{L}{l}\right)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{L}{l} &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow L &= \sqrt{2} \times l \end{aligned}$$

□

Nous remarquons que ce rapport est utilisé dans la vie de tous les jours : c'est celui entre la largeur et la longueur d'une feuille A4 par exemple.

Théorème : Il existe un pavage dont les tuiles sont carrées. Pour une tuile carrée de côté l, la matrice a pour dimensions l et $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \times l$.

Preuve : On reprend le travail mené sur la recherche d'une matrice pour une tuile donnée.
On a l'égalité suivante :

$$x^2 + Lx - l^2 = 0 \text{ avec } (l\,;\,L\,;\,x) \in \mathbb{R}^{3+*}.$$

Or dans le cas d'une tuile carrée on a $L = l$ donc l'égalité précédente devient :

$$x^2 + xl - l^2 = 0$$

$$\Delta = l^2 + 4l^2$$

$$\Delta = 5l^2$$

$$x = \frac{-l + l\sqrt{5}}{2} = l \times \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Donc pour une tuile carrée de côté 1 on a :

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

C'est à dire :

$$x = \frac{1}{\phi} \qquad \text{où} \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

□

Ce pavage avec le nombre d'or est connu depuis longtemps on le retrouve dans la nature dans la forme de certaines fleurs par exemple.

Ainsi les seules matrices aux proportions remarquables sont celle dont le rapport longueur sur largeur vaut soit $\sqrt{2}$ soit ϕ.

4 Pavages triangulaires

Lors de nos premières recherches nous nous sommes rendus compte de la facilité à produire un pavages avec tuile et matrice où la tuile avait plus de côté que la matrice, comme sur la FIGURE 3.

Mais les pavages obtenus ne sont pas très intéressants car ils ne possèdent pas de contraintes propres, nous avons donc décidé de nous restreindre aux figures dont la tuile est de même nature que la matrice voire possède moins de côtés.

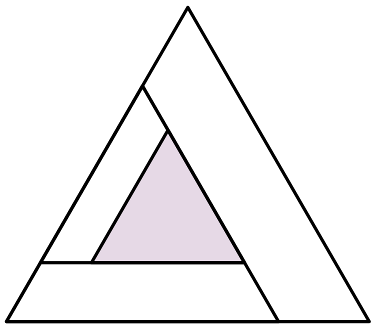


FIGURE 3 – Pavage simple avec tuile et matrice

4.1 Triangles quelconques

Nous nous sommes donc intéressés à la possibilité de paver le plan avec tuiles et matrices triangulaires. Une propriété nous a été utile lors de nos recherches : il faut respecter la mesure des angles à chaque transformation, c'est-à-dire que l'on doit retrouver les angles du triangle qui est la matrice dans sa réduction ou son agrandissement. Ainsi, nous avons testé différentes formes, à commencer par des triangles quelconques (FIGURE 4).

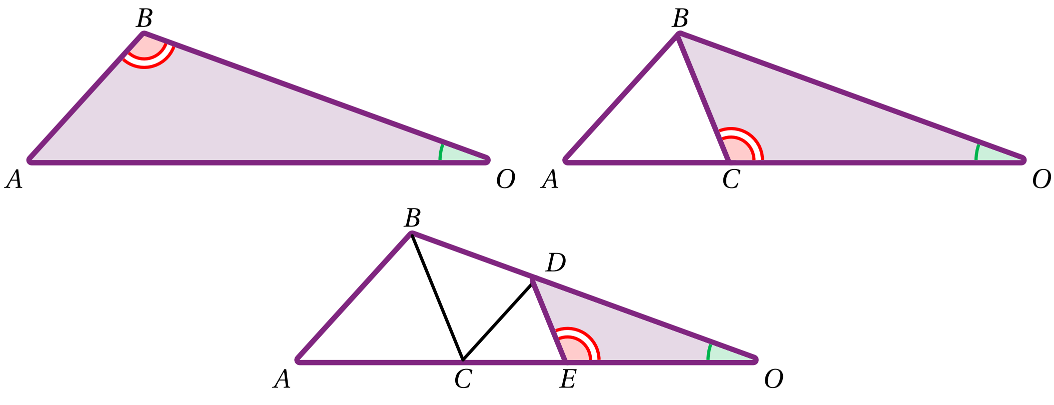


FIGURE 4 – Pavage triangulaire quelconque

Un triangle ne se partage en deux triangles que par un segment joignant un sommet au côté opposé, l'un des deux triangles obtenus doit alors avoir les mêmes angles que le triangle de départ : ceci est toujours possible. Un problème se présente alors, pour "tourner" la matrice dans son agrandissement ou sa réduction et ainsi paver tout le plan il faudrait pourvoir inscrire les angles les uns dans les autres. Or, avec un triangle quelconque c'est impossible, nous pouvons seulement alterner deux angles ce qui force la matrice à rester inscrite dans le secteur du premier angle choisi (FIGURE 4). Mais il y aura plus de possibilités pour des triangles isocèles.

4.2 Triangle rectangle isocèle

Le premier pavage triangulaire sur lequel nous avons travaillé est celui du rectangle isocèle. Ses caractéristiques en font un exemple facile à travailler. Pour paver tout le plan et pas seulement une partie, nous avons défini une règle de construction. Pour ce faire, on choisit un côté de l'angle droit de la matrice et on pose la tuile identique à la matrice toujours sur ce côté. C'est une règle de construction à respecter pour tous les pavages.

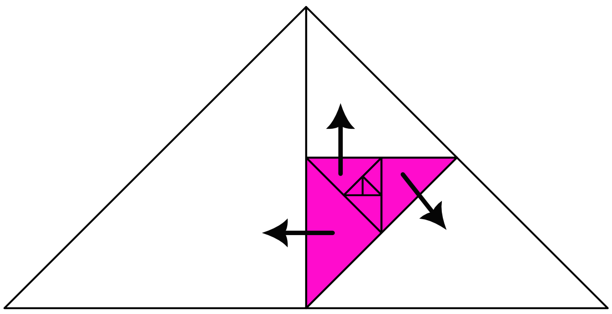


FIGURE 5 – Pavage triangulaire rectangle isocèle

Grâce à cette règle de construction, on remarque que les tuiles et les matrices du triangle isocèle rectangle ont la même forme et la même nature, ainsi qu'un coefficient d'agrandissement de $\sqrt{2}$.

4.3 Triangles isocèles

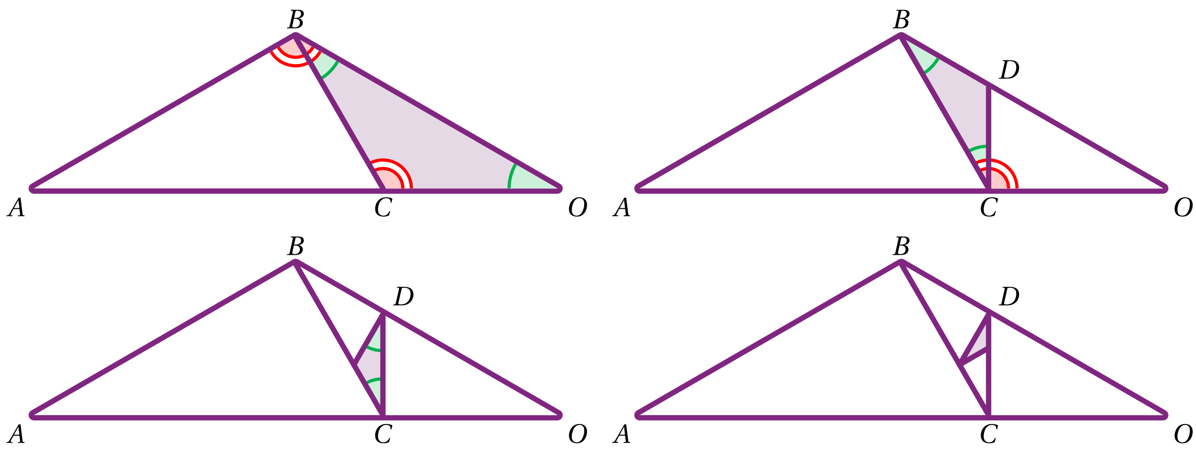


FIGURE 6 – Pavage triangulaire isocèle

Après avoir réussi à paver tout le plan avec le triangle rectangle isocèle nous nous sommes intéressés aux triangles isocèles en général. Nous avions tout d'abord remarqué que le pavage fonctionne avec les triangles isocèles qui ont un angle principal obtus. La FIGURE 6 permet de le comprendre. À chaque étape, les deux angles égaux permettent deux possibilités. Ainsi à l'étape 2 on choisit de placer la base sur la droite (BC) mais on aurait aussi pu placer la base sur la droite (AO) ce qui aurait conduit à un pavage partiel du plan comme pour la FIGURE 4.

De plus nous avons remarqué que l'angle du sommet principal est découpé à chaque étape pour laisser la place à l'angle à la base. Nous en avons conclu que le pavage était possible à condition que l'angle du sommet soit supérieur à celui à la base. Or la somme des angles d'un triangle est de 180° donc on cherche x, angle du sommet principal, tel que $x > 180° - 2x$ donc $x > 60°$.

Les seuls pavages du plan avec tuiles et matrices triangulaires sont donc ceux pour lesquels la matrice est un triangle isocèle qui a un angle principal supérieur à 60°. De plus il y a un pavage avec tuile et matrice de même forme, les triangles sont alors isocèles rectangles avec un coefficient d'agrandissement de $\sqrt{2}$.

5 Pavages pentagonaux

5.1 Un pavage pentagonal en tuile et matrice

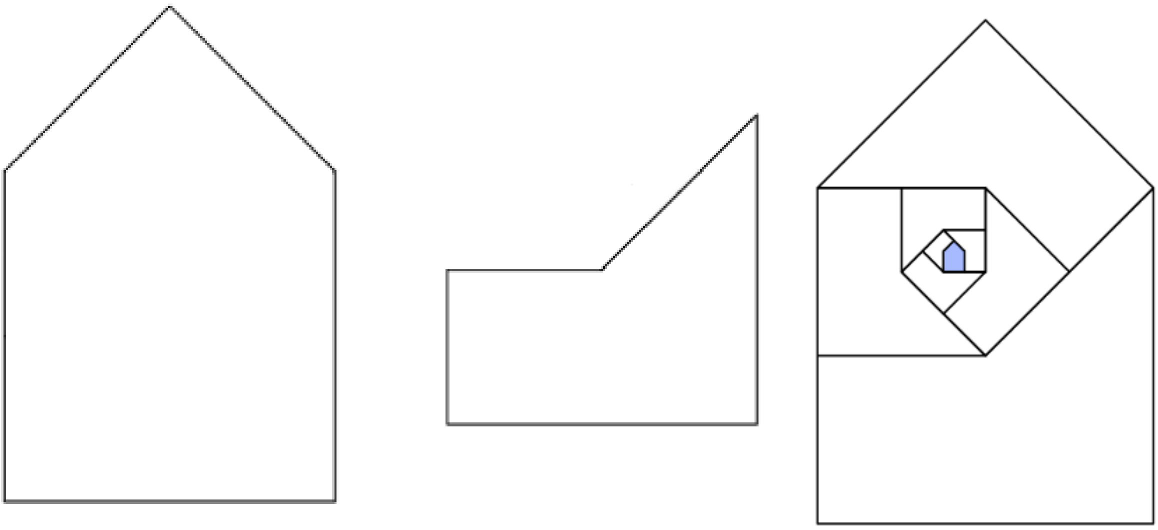


FIGURE 7 – pavage de la « maison »

Nous avons cherché s'il était possible de trouver un pavage pentagonal en tuile et matrice. Nous avons trouvé l'exemple du pavage de la « maison » (FIGURE 7) : ce pavage dit de la « maison » se compose d'une matrice pentagonale à trois angles droits et deux angles à 135° (3) et d'une tuile pentagonale avec un angle rentrant.

Curieusement, nous n'en avons pas trouvé d'autre mais nous avons malgré tout cherché s'il était possible comme pour le triangle et le rectangle d'obtenir un pavage pentagonal avec tuile et matrice semblables.

5.2 Pavage pentagonal avec tuiles et matrices semblables

Pour découper un pentagone en deux autres pentagones il faut couper le pentagone selon une ligne brisée à deux segments qui relie un sommet avec un point du côté du côté opposé. En effet, on peut distinguer cinq façons de découper un pentagone en deux : côté à côté adjacent ; côté à côté non adjacent ; sommet à côté non opposé ; sommet à sommet ; sommet à côté opposé. Seul le dernier découpage crée deux figures avec le même nombre de côtés.

Il faut distinguer trois cas selon le type de pentagone :

5.2.1 Pentagone convexe

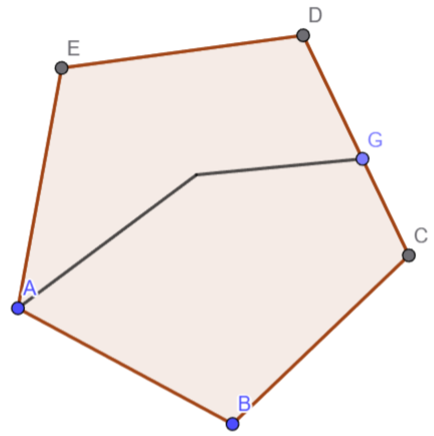


FIGURE 8 – Pentagone convexe

Il est impossible que les deux pentagones formés par le découpage du grand pentagone selon la ligne brisée aient la même forme. En effet l'un des deux petits pentagones ne possède pas d'angle rentrant alors que l'autre en possède un.

5.2.2 Pentagone avec un angle rentrant

Il y existe plusieurs possibilités de découpes pour chaque pentagone. En tout il y en a dix mais certaines sont semblables par symétrie par rapport à l'angle rentrant : seuls trois cas sont réellement distincts, représentés sur la FIGURE 9.

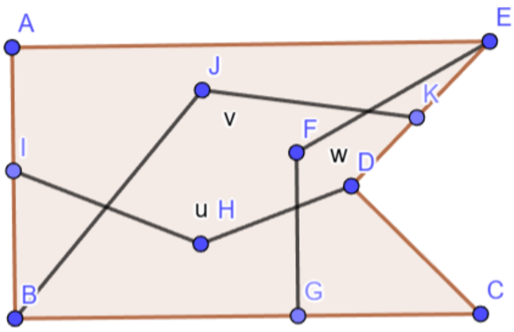


FIGURE 9 – Pentagone avec un angle rentrant

Pour la ligne w il va falloir raisonner sur les égalités d'angles. En effet pour que les deux petits pentagones soient semblables il faut que leurs angles soient égaux à un retournement près.

On a donc, sans retournement, les égalités :

$$\widehat{DCG} = \widehat{FGB} \text{ et } \widehat{BAE} = \widehat{GFE} = \widehat{CDE}$$

Or les deux premiers sont des angles correspondants donc (CD) est parallèle à (GF). Ensuite le fait que $\widehat{BAE} = \widehat{GFE} = \widehat{CDE}$ induit que (FE) et (DE) sont parallèles. Il est donc impossible dans ce cas de fermer la figure pour arriver au point E.

Par retournement, on obtient aussi les correspondances :

$$\widehat{DCG} = \widehat{FEA}\ ,\ \widehat{DEF} = \widehat{FGB}\ ,\ \widehat{FGC} = \widehat{BAE}\ ,\ \widehat{CDE} = \widehat{GFE} = \widehat{GBA} \text{ et } \widehat{DEF} + \widehat{FGC} = 180°$$

Dans ce cas on aurait $(AE)//(FE)$.

En effet en partant de la droite (BC) on applique pour le chemin GFE et pour le chemin BAE les mêmes angles dans des ordres différentes. Donc la figure ne pourrait pas se fermer au point E. En somme le découpage selon w ne permet pas d'obtenir deux petits pentagones égaux.

Voyons maintenant le découpage en v. Celui-ci peut produire un pentagone convexe et un autre avec deux angles rentrants, ou deux petits pentagones avec un angle rentrant chacun : c'est ce dernier cas qui nous intéresse. En raisonnant de nouveau sur les angles on obtient que pour que les deux petits pentagones soient de même forme il faut :

$$\widehat{CDK} = \widehat{BJK} = \widehat{AEK} \quad \text{et} \quad \widehat{EKJ} = \widehat{DKJ} = 90°$$

On continue d'associer chaque angle de l'un à chaque angle de l'autre en tenant compte du changement d'orientation. Il apparaît alors qu'un découpage est possible en deux pentagones semblables si le pentagone $ABCDE$ vérifie les propriétés d'angles mentionnées en FIGURE 10.

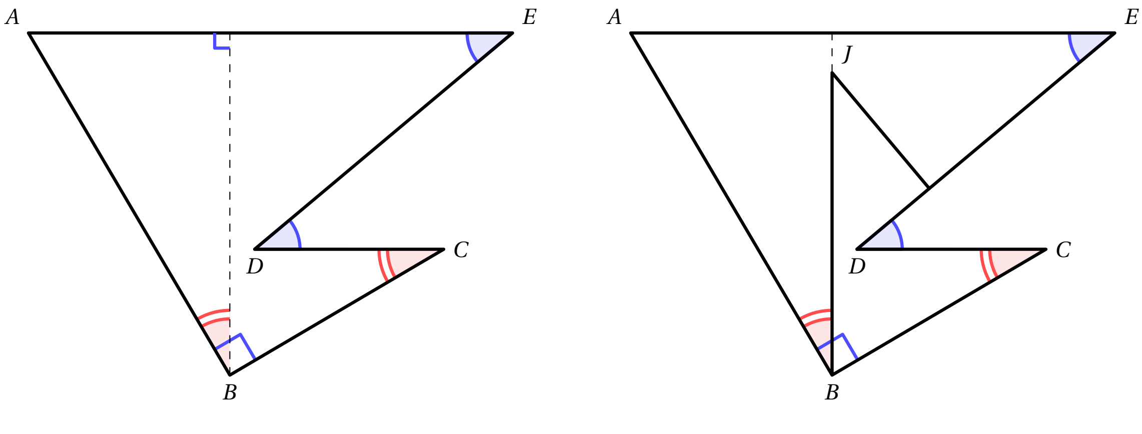


FIGURE 10 – Partage d'un pentagone en deux pentagones semblables

Le découpage se fait alors en définissant la longueur BJ de telle sorte que BCD et AJB soient semblables.

On trouve alors une infinité de possibilités respectant ces critères, des exemples sont donnés en FIGURE 11.

Par contre, par retournement on ne peut pas obtenir de découpage viable. En effet, dans ce cas les angles en K n'ont pas de contrainte et on observe que l'angle $\widehat{JKE}$ ne peut pas être égal à $\widehat{DCB}$ alors qu'il le devrait. Lorsque l'un est obtus alors l'autre est aigu et s'il est droit alors on ne peut pas avoir $\widehat{ABJ} = 90°$.

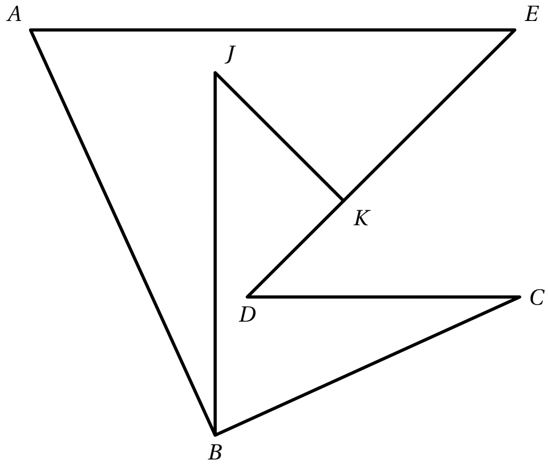


FIGURE 11 – Exemples de partage d'un pentagone en deux pentagones semblables

Enfin, la ligne brisée u crée le même type de pentagone que dans le cas des pentagones sans angles rentrants. Mais elle peut aussi créer deux pentagones concaves si H est "à droite" de (DE). Dans ce cas on obtient $\widehat{EDH} = \widehat{CDH}$ ce qui conduit à une incohérence.

Par retournement du pentagone "inférieur" nous ne pouvons pas non plus obtenir une solution. Pour le pentagone "inférieur" on a $(IH)//(BC)$ et $(BA)//(HD)$, on doit alors retrouver ces parallélisme pour le pentagone "supérieur". Cela engendre $(IH)//(DE)$ et à cause des angles alternes-internes $\widehat{HDC}$ doit être nul. Il y a contradiction avec le fait que les deux parties soient pentagonales.

5.2.3 Pentagone avec deux angles rentrants

Nous allons voir ce que donne le découpage d'un pentagone avec deux angles rentrants pour chercher s'il y a d'autres possibilités.

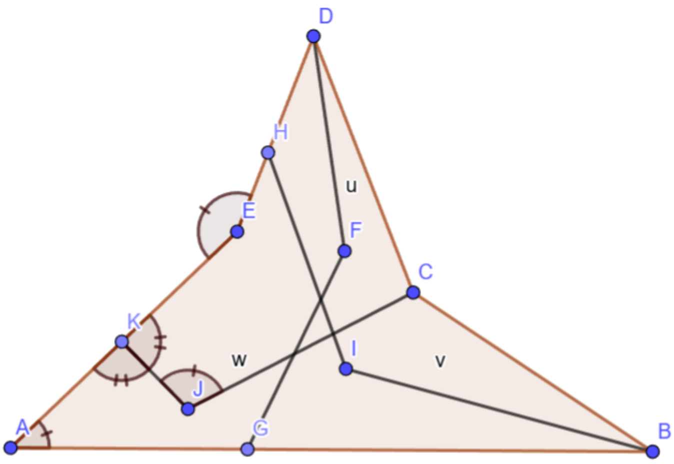


FIGURE 12 – Pentagone avec 2 angles rentrants

Les découpages u ainsi que v créent tous les deux d'un côté un pentagone avec un angle rentrant et de l'autre un pentagone avec deux angles rentrants. Les deux petits pentagones ne peuvent donc pas être de même forme. Pour ce qui est du découpage w la situation est plus compliquée. Comme le montre la FIGURE 12, les deux petits pentagones ont un angle rentrant. Regardons de nouveau les égalités d'angles en prenant en compte l'orientation de l'angle rentrant.

$$\widehat{AKJ} = \widehat{JKE} = 90° \text{ et } \widehat{BAK} = \widehat{CJK} = \widehat{KED}$$

Les angles alternes-internes $\widehat{BAE}$ et $\widehat{AED}$ sont égaux donc $(AB)//(DE)$, ce qui signifie que l'angle $\widehat{BCD}$ est saillant. Si $\widehat{BCD}$ est saillant cela signifie que le grand pentagone n'a qu'un angle rentrant et alors on retombe sur le découpage en v d'un pentagone avec un seul angle rentrant. Le découpage en deux petits pentagones semblables n'est donc pas possible pour un pentagone avec deux angles rentrants.

5.3 Conclusion

Nous avons démontré que les pentagones ne peuvent être découpés en deux petits pentagones semblables que dans un seul cas. Or dans ce cas, le grand pentagone n'a pas la même forme que les petits : en appliquant les conditions nécessaires, on trouve que le pavage serait possible à condition que le grand pentagone ait quatre angles droits ce qui est impossible. Ainsi il n'existe aucun pavage en tuiles et matrices semblables pour les pentagones.

6 Pavage hexagonaux

6.1 Des pavages hexagonaux en tuile et matrice

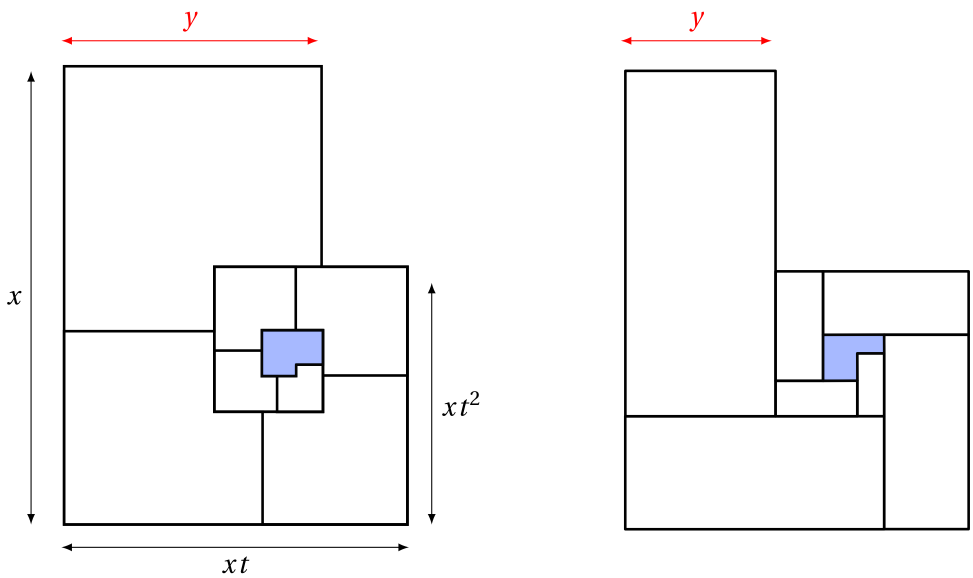


FIGURE 13 – Deux pavages « en L » avec x et t identiques mais y différent

Nous avons travaillé sur un type de pavages hexagonaux, découvert assez rapidement dans nos recherches, que nous avons nommé hexagone « en L ». Dans cette situation, la tuile et la matrice sont des hexagones et tous les angles de la matrice sont droits et un angle est rentrant. Il y aussi des contraintes sur les proportions de trois côtés. Ainsi, nous pouvons définir un hexagone « en L » à l'aide de trois variables que l'on nommera x, y et t : x est un réel strictement positif, t est un réel strictement compris entre 0 et 1 et y est strictement compris entre 0 et xt. Ainsi pour passer de la matrice à la suivante via un agrandissement il faut multiplier toutes les longueurs par $\frac{1}{t}$. Ces trois variables étant indépendantes nous nous sommes rendus compte qu'en modifiant la valeur de y (le "haut" de la matrice) nous pouvions créer une tuile avec moins de côté que la matrice comme sur la FIGURE 13 : nous pensions auparavant que ce n'était pas possible.

6.2 Pavage hexagonal avec tuile et matrice semblables

Notre but était de savoir s'il existait un pavage « en L » avec tuile et matrice de même forme. Pour ce faire, nous avons exprimé chaque longueur de la tuile et de la matrice en fonction des trois variables x, y et t. Cela permet de traduire le fait que tuile et matrice sont de même forme. Nous effectuons préalablement un retournement pour que l'on puisse superposer tuile et matrice car par une rotation d'un quart de tour la matrice et la tuile sont seulement symétriques. Chaque longueur de la tuile est alors égale à un coefficient de proportionnalité δ près à celle de la matrice qui lui correspond.

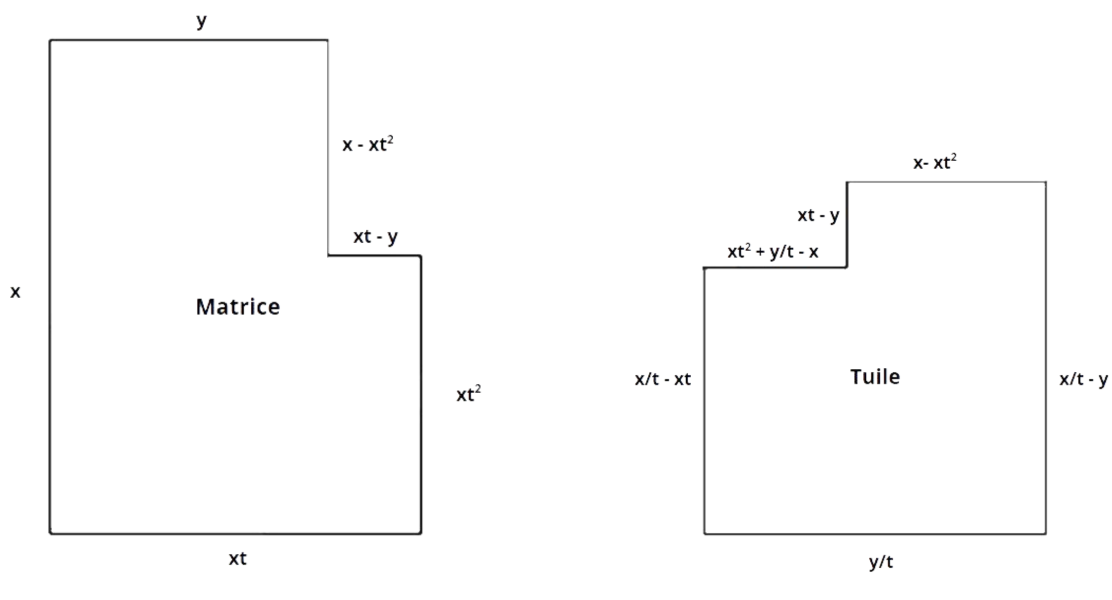


FIGURE 14 – Mise en équation du problème

Nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \left(x - xt^2\right) \times \delta = y \\ \left(\frac{x}{t} - y\right) \times \delta = x \\ \left(\frac{y}{t}\right) \times \delta = xt \\ \left(\frac{x}{t} - xt\right) \times \delta = xt^2 \\ \left(xt^2 + \frac{y}{t} - x\right) \times \delta = xt - y \\ \left(xt - y\right) \times \delta = x - xt^2 \end{cases}$$

On pose arbitrairement une dimension égale à 1 pour simplifier, ce sera $x = 1$. En effet les variables étant indépendantes, s'il existe une solution on pourra trouver un pavage où $x = 1$ par un agrandissement ou une réduction.

$$\begin{cases} \left(1-t^2\right)\times\delta = y \\ \left(\frac{1}{t}-y\right)\times\delta = 1 \\ \delta = \frac{t^2}{y} \\ \left(\frac{1}{t}-t\right)\times\delta = t^2 \\ \left(t^2+\frac{y}{t}-1\right)\times\delta = t-y \\ \left(t-y\right)\times\delta = 1-t^2 \end{cases}$$

On remplace δ par son expression et on supprime l'égalité $\delta = \frac{t^2}{y}$

$$\begin{cases} \left(1-t^2\right)\times\frac{t^2}{y} = y \\ \left(\frac{1}{t}-y\right)\times\frac{t^2}{y} = 1 \\ \left(\frac{1}{t}-t\right)\times\frac{t^2}{y} = t^2 \\ \left(t^2+\frac{y}{t}-1\right)\times\frac{t^2}{y} = t-y \\ \left(t-y\right)\times\frac{t^2}{y} = 1-t^2 \end{cases}$$

On développe :

$$\begin{cases} t^2-t^4 = y^2 \\ t-yt^2 = y \\ t-t^3 = yt^2 \\ t^4+yt-t^2 = yt-y^2 \\ t^3-yt^2 = y-yt^2 \end{cases}$$

On remarque en simplifiant la dernière égalité que $y = t^3$.
Par substitution, développement puis réduction on obtient :

$$\begin{cases} t = t^5+t^3 \\ t = t^5+t^3 \\ t = t^5+t^3 \\ t = t^5+t^3 \\ y = t^3 \end{cases}$$

Nous n'avons plus qu'une équation, avec $t \in \,]\,0\,;1\,[$.

$$t^4+t^2-1=0$$

C'est une équation bicarrée qui possède deux solutions : une positive et une négative, on écarte la négative car $t \in \,]\,0\,;1\,[$. Donc :

$$t = \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{5}-1\right)}}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{\phi}}$$

Ainsi, pour une valeur de x donnée, il existe un unique pavage « en L » où tuiles et matrices sont semblables. Par exemple pour $x=1$, $y=t^3$ et $t=\sqrt{\frac{1}{\phi}}$. Cela donne un pavage où la tuile et la matrice sont identiques avec un décalage d'un rang, soit à une multiplication par $\sqrt{\phi}$ près.

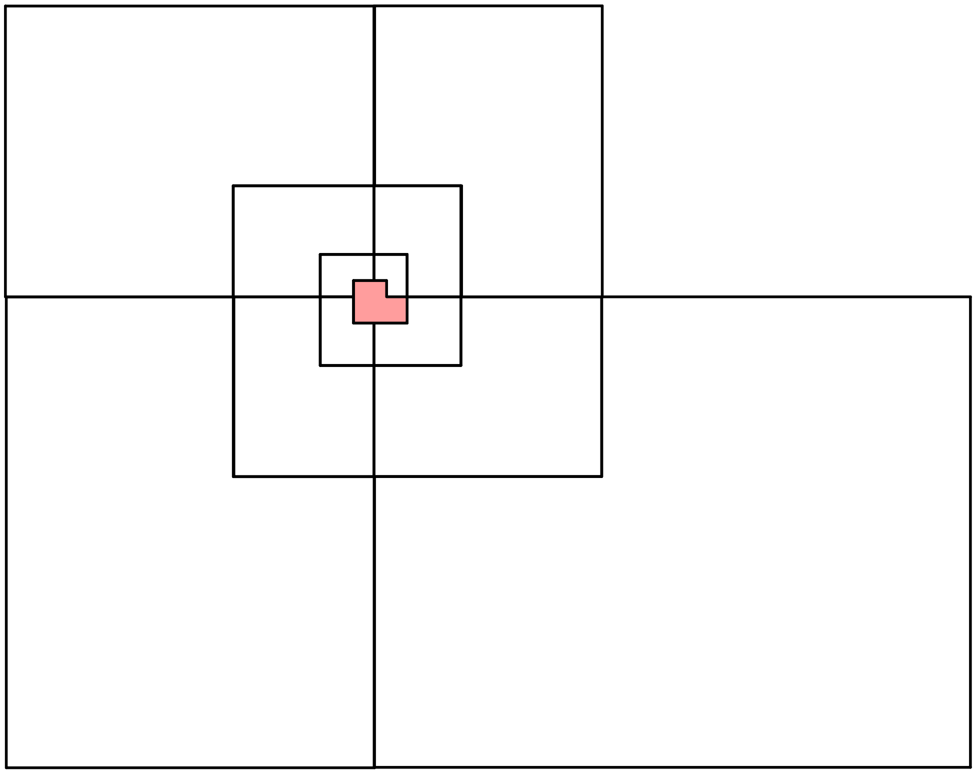


FIGURE 15 – Pavage « en L » avec tuile et matrice semblables

7 Conclusion

Nous avons montré dans cet article que les pavages avec tuiles et matrices sont possibles pour les triangles, rectangles, pentagones et hexagones. Nous nous sommes particulièrement attachés à trouver un pavage avec tuile et matrice semblables pour chaque type de figure. Nous en avons obtenu un pour les rectangles, les triangles, les hexagones mais pas pour les pentagones où seul un pavage a été découvert.

Notes d'édition

(1) Pour cette figure, il manque une légende. Cette légende pourrait être : Enchaînement de l'insertion d'une tuile dans une matrice rectangulaire.

(2) Ce résultat est valide aussi bien quand L est plus grand que l (ce qui peut paraître surprenant à première vue), et quand l est plus grand que L (ce qui ressemble au schéma de la figure 2 en échangeant l et L)

(3) On peut remarquer que les côtés de la maison ont longueur 1 pour la base et les murs, et $\sqrt{2}/2$ pour chaque pan du toit.

Remerciements : Merci à Gaïd Mazé et Louise Bancel pour le pavage par le triangle rectangle isocèle et l'idée de l'hexagone en "L" !
Nous remercions également notre professeur pour l'aide apportée à la réalisation des FIGURES 4, 6, 10, 11 et 15.
Avec le soutien de la Région Bretagne et de Brest Métropole