Pile ou Face ?

Année 2024 – 2025

Elèves du lycée Édouard Herriot (Lyon) : Naelle Jacquemoux, Claire Oudot, Aristide Journet, Nael Ben Brahim, Louis Pouzet, Axel Brisseau

Élèves du lycée Jean Paul Sartre Bron) : Nolan Moriano, Flore Garcia, Evann Crenn, Inès Louarrani, Augustin Sourisseau, Mathis Febvre

Enseignantes : Elisabeth Bruyère, Marie Desquesne , Sylvie Di Fazio et Magali Favre

Chercheur.es : Aline Parreau, Quentin Deschamps, (LIRIS, CNRS et Université Lyon1).

1. Introduction

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
n boîtes, numérotées de 1 à n contiennent chacune une pièce, posée du côté pile ou face avec une chance sur deux.
Deux joueurs, Alice et Bob, choisissent chacun un ordre pour regarder les boites. Une fois les ordres choisis les deux joueurs regardent en même temps la première boite de leur ordre, puis la deuxième, ... jusqu'à ce que l'un des joueurs ait vu un "Face", auquel cas, ce joueur a gagné (1) !

Nous allons donc nous demander s'il existe un ordre d'ouverture qui gagne plus souvent qu'un autre.

2. Un premier exemple avec $n = 3$

Alice choisit l'ordre : 2 – 3 – 1
Bob choisit l'ordre : 3 – 2 – 1

→ Dans le cas où les boites contiennent les pièces comme sur la figure ci-dessous, Alice gagne. En effet, elle est la première à ouvrir la boite 2 donc la première à trouver une pièce sur le côté face

.

→ Dans le cas où l'on ne connait pas de quel côté sont les pièces dans les boites, il y a huit possibilités comme le montre le tableau ci-contre.
On remarque qu'Alice gagne deux fois et Bob trois fois donc Bob a plus de chance de gagner qu'Alice(2).

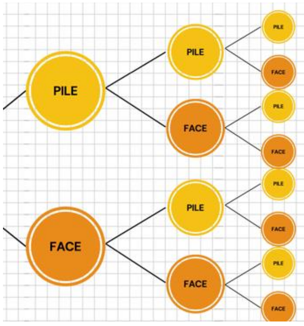
Combinaison	Résultat
PPP	ÉGALITE
PFP	A
PPF	B
FFP	A
PFF	ÉGALITE
FPF	B
FFF	ÉGALITE
FPP	B

3. Premières propriétés

3.1. Les combinaisons

Définition : Soit n un entier naturel non nul. On définit une **combinaison** de n pièces comme étant une suite ordonnée $(c_1, c_{2,} \dots c_n)$ où chaque élément prend l'une des deux valeurs « Pile » ou « Face ».

Propriété : Le nombre total de combinaisons de n pièces est de 2^n.



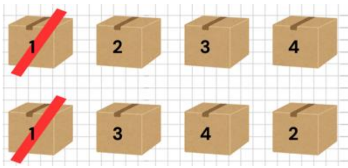
Preuve
Pour la première pièce on a deux choix possibles « PILE », soit « FACE ».
Et pour la deuxième pièce on a, de nouveau, 2 choix possibles soit 2×2 choix

Pour n pièces, le nombre total de combinaisons est donc donné par
$2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ (avec n facteurs)

3.2. Les ordres commençant par le même numéro

Propriété : Lorsque l'on étudie deux ordres qui commencent par la même boîte, cela revient à étudier ces ordres en ne tenant pas compte de celle-ci.

En effet, si cette boîte contient une face, alors les deux joueurs l'ouvriront simultanément et il y a égalité ; sinon la boîte contient un « pile », la partie continue la boîte ne sera plus rouverte et n'aura plus aucune incidence sur la suite de la partie.



Exemple :
Alice choisit d'ouvrir les boîtes dans l'ordre 1234
Bob, choisit d'ouvrir les boîtes dans l'ordre 1342.
La boîte 1 étant à la même position dans les deux ordres, celle-ci n'est pas prise en compte dans l'étude de l'ordre gagnant.

3.3. L'ordre miroir

Définition : L'**ordre opposé** à un ordre donné est obtenu en le lisant à l'envers.

Définition : Lorsque Alice et Bob ouvrent leurs boîtes dans un ordre dit "opposé", alors on dit que leurs ordres d'ouverture sont des **ordres miroir**.

Exemple d'ordres miroir : 1 – 2 – 3 – 4 et 4 – 3 – 2 – 1

Propriété : Si Alice et Bob choisissent des ordres miroirs alors ils ont la même probabilité de gagner.

En effet, à chaque combinaison pour laquelle Alice gagne telle que PPFF…PF, il existe une combinaison opposée à celle-ci, dite miroir, qui permettra cette fois à Bob de gagner : FP….FFPP.
Donc si Alice et Bob s'opposent, alors aucun n'a une probabilité plus importante de gagner.

4. Résultats et probabilités

4.1. Probabilités pour un décalage de 1

Propriété : Dans le cas où Alice et Bob choisissent les ordres suivants :

A = 12345…n

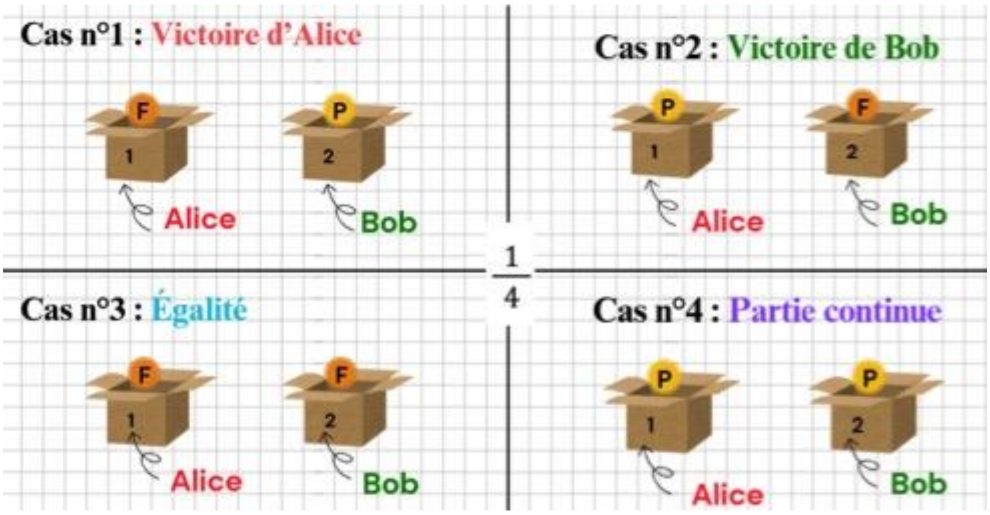
B = 2345…n1

Alors on obtient les probabilités suivantes :

- P(victoire Alice) = $\frac{1}{4}$
- P(victoire Bob) = $\frac{1}{4} + \frac{2^{n-2}-1}{2^n}$ (3)
- P(égalité) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{2^n}$

Démonstration :

Au premier tour : Commençons par étudier le premier tour de cette partie. Selon l'ordre déterminé plus haut, Alice ouvre la boîte 1 et Bob ouvre la boîte 2.
Ainsi, il y a 4 configurations possibles (des pièces) qui peuvent se trouver sous les boîtes :



À la fin du premier tour, nous avons donc les probabilités suivantes :

P(victoire Alice) = $\frac{1}{4}$; P(victoire Bob) = $\frac{1}{4}$; P(égalité) = $\frac{1}{4}$ et P(partie continue) = $\frac{1}{4}$

Si la partie continue :
Nous avons vu que dans un quart des cas, la partie continue et dans ce cas les deux joueurs ouvrent alors la $2^{ème}$ boîte de leur ordre. Alice ouvrira donc la boîte 2 et Bob la boîte 3. Or nous remarquons que la boite 2 a été ouverte précédemment par Bob. Comme la partie continue, cela signifie que la boite 2 contient nécessairement un « pile ».
Cette situation se répète pour toutes les boîtes qu'Alice ouvrira ensuite car Bob les aura ouvertes avant.
Alice n'a plus la possibilité de gagner.
Sachant que la partie continue, la probabilité de victoire d'Alice est nulle.

Deux cas se présentent alors, soit il y a égalité soit Bob gagne.

→ Cas 1 : Déterminons la probabilité qu'il y ait égalité sachant que la partie continue.
Il y a égalité lorsque les boites 3 à n ouvertes par Bob contiennent un pile. (La dernière de l'ordre de Bob, la boite 1, a déjà été ouverte par Alice et contient un « pile » car Alice n'a pas gagné suite au premier tour)
Il y a une chance sur deux qu'une boite contienne un « pile » et $n - 2$ boites à ouvrir.
Sachant que la partie continue, la probabilité qu'il y ait égalité est $\frac{1}{2^{n-2}}$

➔ Cas 2 : Sachant que la partie continue, Bob gagne alors avec une probabilité $1 - \frac{1}{2^{n-2}}$

Conclusion : Nous obtenons en utilisant les probabilités obtenues au tour 1
P(victoire Alice) = $\frac{1}{4} + 0$ P(égalité) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{n-2}}$ P(victoire Bob) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-2}}$

4.2. Résolution générale pour une face

Définition : Nous appellerons **nouvelle boîte** une boîte qui, jusqu'alors n'a pas été ouverte.

Propriété : Le joueur qui découvre en premier une nouvelle boîte alors que son adversaire ouvre une boîte déjà ouverte a plus de chance de gagner

Un exemple pour bien comprendre :
Dans le tableau ci-dessous, figurent deux ordres dans les lignes du milieu et au-dessus et en-dessous un 1 pour toute nouvelle boîte et un 0 pour toute boîte déjà ouverte.

Nouvelle ou pas	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Ordre d'A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ordre de B	2	10	1	3	4	5	6	7	8	9
Nouvelle ou pas	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Ainsi, selon notre propriété, comme au tour numéro 2, Bob ouvre une nouvelle boîte et Alice ouvre une boîte déjà ouverte, Bob gagne malgré l'ouverture des sept autres nouvelles boîtes par la suite pour Alice.

Justification dans ce cas particulier :

Alice, notée A, a choisi l'ordre : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et Bob, noté B, l'ordre 2, 10, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Nous chercherons quel ordre a le plus de chances de gagner sur les 2^{10} soit 1024 combinaisons existantes de pile ou de face.

Nous choisissons tout d'abord de regrouper les 2^{10} combinaisons en quatre groupes égaux, en fonction de l'état des pièces dans les boîtes 1 et 2, afin de pouvoir étudier ce qu'il arrivera à l'issue du premier tour.

→ Groupe 1 : Dans les boîtes 1 et 2, se trouve une pièce indiquant face.
→ Groupe 2 : Dans la boîte 1 se trouve une face et dans la boîte 2, une pile.
→ Groupe 3 : Dans la boîte 1 se trouve une pile et dans la boîte 2 une face.
→ Groupe 4 : Dans les boîtes 1 et 2 se trouve une pièce côté pile.

Comme il y a une chance sur deux d'obtenir une pile ou une face, chacun de ces groupes contient 2^{10-2} combinaisons et représente 25% du total.

Ainsi, dans le premier groupe, comme A et B ouvrent une boîte contenant une pièce sur face, les deux gagnent dès le premier tour et font donc égalité. Nous pouvons ainsi conclure que dans 25% des cas, A et B font égalité.

Le deuxième groupe, quant à lui, permet à A de gagner. En effet, dès le premier tour, A ouvre une boîte avec une face et gagne tandis que B ouvre une boîte contenant une pile, laissant ainsi la victoire à A. Nous ajoutons que 25% des cas représentent une victoire de A.

De la même façon, le troisième groupe permet à B de gagner dans 25% des cas ce que nous ajoutons au compteur final.

Le dernier groupe, quant à lui, ne permet pas de déterminer un vainqueur, à l'issue du premier tour. En effet comme A et B ouvrent une boîte contenant une pièce sur pile, ni l'une ni l'autre ne gagne et la partie continue. Il nous faudra étudier ce qui se passe au second tour.

Ainsi, nous avons étudié 75% des combinaisons possibles et concluons que 25% d'entre elles sont des égalités, 25% des victoires de A et 25% des victoires de B. Étudions dorénavant les 25% de cas restants.

Revenons au dernier groupe, nous allons le subdiviser afin d'étudier ce qu'il arrivera au deuxième tour. Ainsi nous effectuerons notre subdivision en fonction de la pièce contenue en boîte 10 uniquement, la boîte 2 étant déjà considérée sur pile(4) dans les conditions du groupe 4.

- Le groupe 4_a sera composé des combinaisons ayant une face en boîte 10.
- Le groupe 4_b sera composé des combinaisons ayant une pile en boîte 10.

Le groupe 4_a permet à B d'ouvrir une boîte (la 10) contenant une pièce sur face, tandis que A ouvre la boîte 2 contenant une pile. Ainsi dans ces 12,5% du groupe 4_a, c'est B qui gagne portant ainsi sa probabilité de victoire à 37,5%.

Le groupe 4_b quant à lui ne détermine pas de vainqueur car les 3 boîtes ouvertes possèdent toutes une pièce sur pile. Il nous faut donc continuer à étudier ce qu'il se passe par la suite.

Toutes les boîtes qui ne sont pas encore ouvertes dans le groupe 4_b seront d'abord ouvertes par A, par exemple : la boîte 3 est ouverte au tour 3 par A tandis que B l'ouvre au tour 4, etc… (cf le tableau ci-dessus).

Ainsi, s'il y a une face quelque part dans les boîtes, nous admettons que ce sera A qui la trouvera. Sur les 128 combinaisons de possibles du groupe 4_b, une seule ne contient que des piles donc 127 comptent au moins une face.

Nous pouvons donc conclure que, dans le groupe 4_b, environ, 12,4% des combinaisons (= 127/1024%) permettent une victoire de A, tandis que 0,1% d'entre elles (= 1/1024%) font égalité.

En additionnant donc toutes les probabilités, on trouve, avec les deux ordres choisis que A gagne dans 37,4% du temps, B dans 37,5% et qu'il y a égalité dans 25,1%.
Nous concluons donc que l'ordre de Bob gagne plus souvent que l'ordre d'Alice.

Nous pouvons généraliser notre raisonnement.
Nous appellerons i l'indice auquel les nouvelles boîtes divergent pour nos deux joueurs. Par conséquent jusqu'à cet indice i, aucun joueur ne peut obtenir une probabilité plus élevée de gagner car soit les deux ouvrent une nouvelle boîte et ainsi nous retrouvons nos quatre groupes, soit les deux ouvrent une boîte déjà ouverte et cela signifie, si nous en sommes à ce stade de la partie, qu'elle contient forcément une pièce sur pile. Ainsi jusqu'à i les probabilités de victoire sont les mêmes.

Ensuite, à l'indice i, le joueur qui ouvre une nouvelle boîte à 1 chance sur 2 sur les combinaisons restantes de gagner tandis que son adversaire qui ouvre une boîte déjà ouverte n'augmente pas ses chances. Sur l'autre moitié des combinaisons restantes, il y en a au moins une qui ne contient que des pièces sur pile et par conséquent ne permet pas au joueur qui n'ouvre pas une nouvelle boîte de gagner. Ainsi nous savons que même si ce joueur parvenait à remporter toutes les autres combinaisons, il lui en manquerait au moins une afin de faire égalité.

Pour conclure le joueur qui ouvre une nouvelle boîte à l'indice i se sécurise une probabilité plus élevée de gagner et donc nous le déclarons vainqueur.

5. Conclusion et ouverture

Après avoir effectué des premières observations : nombre de combinaisons, étude des ordres miroirs, nous sommes parvenus à résoudre notre problème. Nous sommes capables de comparer tous les ordres deux à deux et avons prouvé que le premier joueur qui découvre une nouvelle boîte alors que son adversaire ouvre une boîte déjà ouverte a plus de chance de gagner.

Nos recherches nous ont donné envie de poursuivre l'étude dans une nouvelle direction : « Et si le jeu ne s'arrêtait pas à la première boite Face trouvée ? » Nous pourrions considérer alors que pour obtenir la victoire il faut être le premier à trouver deux Face dans ses boites.

Notes d'édition

(1) Si les deux voient « face » au même moment, ou ne voient que des « piles », la partie est nulle.

(2) La conclusion de cet exemple contredit le résultat général donné page 4 : en fait il y a une erreur sur les dernier cas FFP, dont le résultat est « ÉGALITÉ »

(3) Cette formule se simplifie en $= \frac{1}{4} + \frac{2^{n-2}-1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$. Avantage : on voit mieux que la somme des probabilités est 1.

(4) Il faut lire : la boite 2 contenant toujours « pile ».