Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Un partage équitable

Année 2024 – 2025

Anaïs Proquin-Collignon (3e) et Violette Vannson, élèves de classe de 3e et 4e

Établissement : Collège Langevin Wallon – Blainville-sur-l'Eau

Enseignant : Stéphane Mangenot

Chercheur et Chercheuse : Samuel Tapie et Aline Kurtzmann, IECL

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

C'est l'histoire de deux hamsters, Alice et Bob. Toute la journée, ils ont cherché des graines. Le soir venu, chacun compte son trésor. Mais voilà : un problème surgit. Ils tiennent absolument à se partager leurs graines de manière parfaitement équitable. Pas question de tricher, pas question d'injustice.
Alors, ils inventent une règle simple… ou presque.

Règle : Si Alice a plus de graines que Bob, elle donne à Bob autant de graines que Bob en possède. Et inversement si Bob est le plus riche.

Une règle qui semble claire au départ, mais qui, vous allez le voir, va soulever une montagne de questions. C'est l'histoire d'un petit jeu… qui cache de grandes idées.

2. Résultats

2.1. Nos premiers constats

Nous avons commencé nos recherches en testant différents partages. Au début, cela nous semblait un peu hasardeux. Mais très vite, nous avons remarqué que certains cas donnaient toujours le même résultat, et d'autres pas du tout.
Nous avons alors commencé à identifier des **régularités**, des **motifs**, et à en déduire des **règles**. Ce petit jeu de hamsters est devenu un véritable terrain d'exploration mathématique.

2.2. Des exemples parlants

2.2.1. Exemple 1 : (Alice 20, Bob 12)

- Alice a plus, elle donne 12 à Bob → (8, 24)
- Bob a plus, il donne 8 à Alice → (16, 16)

Les deux ont le même nombre de graines ➜ **le système converge**

2.2.2. Exemple 2 : (Alice 1, Bob 9)

- Bob donne 1 → (2, 8)
- Bob donne 2 → (4, 6)
- Bob donne 4 → (8, 2)
- Alice donne 2 → (6, 4)
- Alice donne 4 → (2, 8)

…

On retrouve les mêmes nombres qu'auparavant. ➜ **Le système entre dans un cycle infini.**

2.3. Une première piste : la somme des graines

Une première observation s'est imposée :
Pour qu'un partage fonctionne, **le nombre total de graines doit être un nombre pair**.

Nous avons alors vérifié avec nos exemples :

- (20, 12) → 20 + 12 = 32 → pair ➜ ça fonctionne
- (1, 9) → 1 + 9 = 10 → pair ➜ ça ne fonctionne pas

La somme est **paire dans les deux cas**, mais un seul partage fonctionne.

Conclusion
La condition d'avoir un total pair **ne suffit pas** pour expliquer le phénomène.
Il fallait donc explorer plus loin.

2.4. Programmation sur Scratch

Nous avons utilisé un programme Scratch pour simuler les échanges. Cela nous a permis d'accélérer notre recherche et de tester un très grand nombre de cas.


quand est cliqué
supprimer tous les éléments de la liste nombre de graines
demander Quel est le nombre de graines d'Alice ? et attendre
mettre graines_alice à réponse
demander Quel est le nombre de graines de Bob ? et attendre
mettre graines_bob à réponse
répéter jusqu'à ce que graines_alice = graines_bob
si graines_alice > graines_bob alors
ajouter -1 * graines_bob à graines_alice
ajouter graines_bob à graines_bob
ajouter regrouper graines_alice et regrouper ; et graines_bob à nombre de graines
sinon
si graines_bob > graines_alice alors
ajouter -1 * graines_alice à graines_bob
ajouter graines_alice à graines_alice
ajouter regrouper graines_alice et regrouper ; et graines_bob à nombre de graines
si longueur de nombre de graines = 50 alors
stop tout

2.5. Réduction par le PGCD

Nous avons alors testé une autre idée : **réduire** les paires en divisant chaque nombre par leur PGCD (Plus Grand Commun Diviseur).
Cela nous permet d'obtenir une paire simplifiée, qu'on appelle (A', B'), où les deux valeurs sont **premières entre elles**.

Exemples :

- (6, 2) → PGCD = 2 → (3, 1)
- (10, 6) → PGCD = 2 → (5, 3)

Cette méthode nous a permis d'éliminer les cas où les deux valeurs ont un facteur commun, et d'observer le comportement du système dans sa forme la plus simple. C'est alors que nous avons observé un résultat frappant.

2.6. Une conjecture

Quand on observe les paires réduites (A', B') et qu'on calcule la somme A' + B', on remarque :

Quand A' + B' est une puissance de 2 (2, 4, 8, 16…), alors le partage converge toujours. Sinon, le système entre dans un cycle infini.

Vérifications :

- (20, 12) → PGCD = 4 → (5, 3) → 5 + 3 = 8 → 2^3 → convergence
- (1, 9) → PGCD = 1 → (1, 9) → 1 + 9 = 10 → pas une puissance de 2 → cycle

Cette **conjecture** a été testée sur de nombreux cas grâce à notre programme. Et nous n'avons trouvé **aucun contre-exemple**.

3. Conclusion : un petit jeu, une grande découverte

À partir d'un jeu simple, nous avons mené une vraie **enquête mathématique**. Ce travail nous a montré que les mathématiques ne sont pas qu'une affaire de calculs : ce sont aussi des outils pour explorer, modéliser, formuler des hypothèses, et comprendre des comportements complexes à partir de règles simples.
Et dans notre cas, tout a commencé… avec deux hamsters et une poignée de graines.

Note d'édition

On pourrait malgré tout dire que cette manière de procéder pour que les deux animaux se retrouvent avec la même quantité de graines est assez étrange : si la somme a+b est paire il suffit que, si a>b, Alice donne a-(a+b)/2 graines à Bob. Ainsi Alice possède (a+b)/2 graines et Bob également.