

# La station spatiale

Année 2024 - 2025

Antonin BILLOT- -CHOLLET, Grégory PROVENDIER, Noé BOUZEHOANE, Annaëlle BEAUBEAU élèves de classe 110, 102 et 107

Établissement : Léonce Vieljeux

Enseignant-e(s) : Mme.Rachel BITON et M. VEDERINE

Chercheur : M. Cyrille OSPEL, Université de La Rochelle

## 1 Introduction: Présentation du sujet

Un ingénieur s'occupe d'une station spatiale en forme d'anneau comme sur la figure ci-contre. Pour effectuer des réparations sur le cercle rouge à l'extérieur de la station, l'ingénieur sort du sas de sortie au niveau du point noir. Ce dernier est équipé d'un jetpack, cependant avant de sauter, il doit entrer la longueur du saut à effectuer. Chaque saut du réparateur s'effectue en ligne droite, jusqu'à ce qu'il rejoigne un point du cercle rouge. De plus, entre deux sauts l'ingénieur ne peut pas changer la longueur choisie et ne peut pas non plus effectuer de saut en sens inverse.

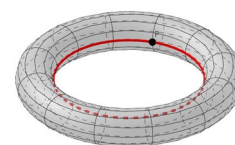


Figure 1: Schéma de la station

Nous avons plusieurs objectifs :

- 1- Déterminer quelle doit être la longueur choisie pour former une étoile à 5 branches.
- 2- Découvrir s'il existe des distances pour lesquelles le réparateur ne revient pas à son point de départ.
- 3- Connaître le nombre de sauts que le réparateur devra effectuer pour rentrer au sas de sortie.

## 2 Données initiales

- Circonférence de la station : 1 km
- Rayon :  $1/2\pi$  km
- Diamètre :  $1/\pi$  km

## 3 Nos recherches

### 3.1 Question 1 : Quelle doit être la longueur choisie pour former une étoile à 5 branches ?

Pour ce faire, nous nous plaçons dans le triangle AHO, rectangle en H, afin de pouvoir utiliser la trigonométrie. De plus l'angle HOA mesure  $72^\circ$  car il correspond à  $\frac{1}{5}$ ème de  $360^\circ$ :

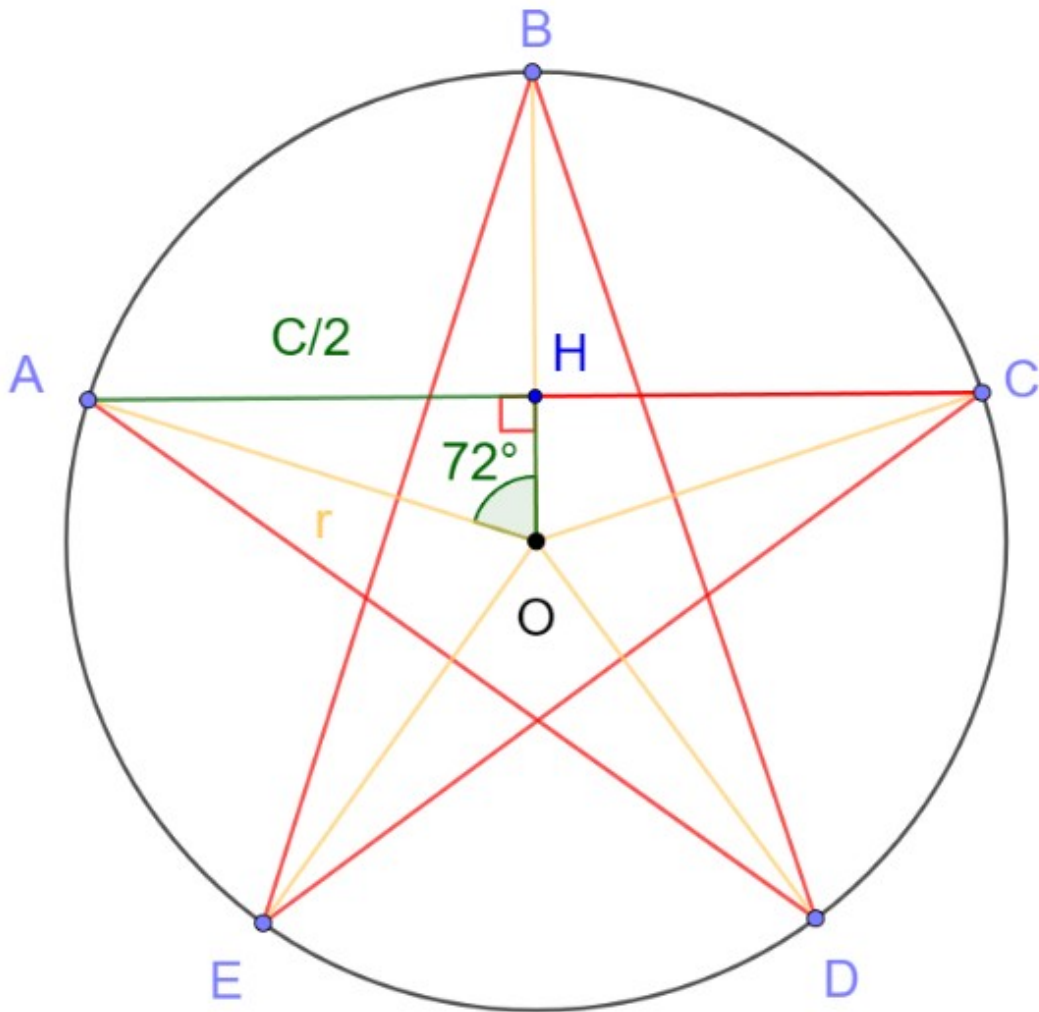


Figure 2: Etoile à 5 branches

Nous cherchons donc la valeur de C (1): la longueur choisie.

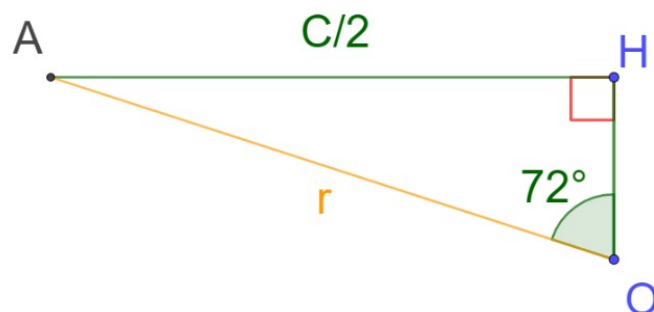


Figure 3: Angle HOA

On obtient :

$$\sin(AOH) = \frac{AH}{AO} = \frac{\frac{C}{2}}{r} = \frac{\frac{C}{2}}{\frac{1}{2\pi}}$$

$$\sin(72^\circ) = \frac{C}{2} \times \frac{2\pi}{1} = C \times \pi$$

$$\sin(AOH) = \sin(72^\circ) = C \times \pi \Rightarrow C = \frac{\sin(72^\circ)}{\pi} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4\pi} \approx 0,302 \text{ km} = 302 \text{ m}$$

Pour former une étoile il faut donc que le réparateur spatial règle son jetpack sur

$$\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4\pi} \text{ km.} \quad \text{CQFD}$$

● **3.2 Question 2: Découvrir s'il existe des distances pour lesquelles le réparateur ne revient pas à son point de départ ?**

Pour la suite de l'article, les radians seront utilisés pour les angles.

Notre premier objectif est de trouver une relation entre la corde du cercle (longueur choisie par le réparateur) et l'arc de cercle qui y correspond car on sait que le cercle a un périmètre de 1km donc il nous suffira ensuite de déterminer si, en multipliant cette portion de cercle un nombre suffisant de fois, on obtient un entier ce qui impliquerait que le réparateur est revenu à son point de départ.

On pose:

c = la corde (longueur choisie)

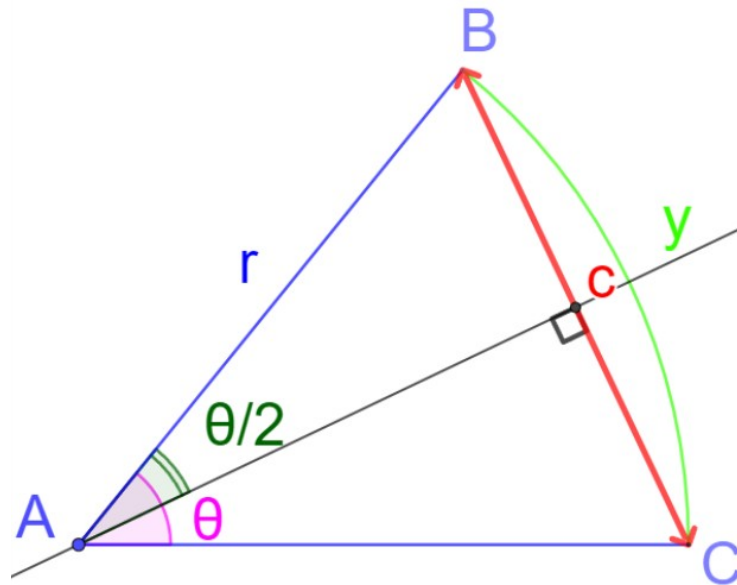
y = l'arc de cercle correspondant à c

O = le centre du cercle

$\theta$  = l'angle formé à partir de c et du centre du cercle

r = le rayon du cercle =  $1/2\pi$

Voici une figure représentant cette situation :



D'après la trigonométrie:

$$\theta * r = y$$

Pour utiliser cette formule, il faut connaître la forme littérale de  $\theta$ .

On commence par chercher  $\theta/2$  car cela nous permet d'être dans un triangle rectangle et donc de pouvoir utiliser la trigonométrie de base.

on a donc puisque  $-\pi/2 < \theta/2 < \pi/2$  :

sin de l'angle = côté opposé (moitié de la corde) sur côté adjacent (rayon du cercle)

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{C}{2} \times \frac{2\pi}{1} = C \times \pi \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \arcsin(C \times \pi)$$

$$\Leftrightarrow \theta = 2 \times \arcsin(C \times \pi)$$

maintenant que nous avons  $\theta$ , nous pouvons utiliser la formule  $\theta * r = y$ :

$$y = \theta \times r$$

$$y = 2 \times \arcsin(c \times \pi) \times \frac{1}{2\pi}$$

$$y = \frac{\arcsin(c \times \pi)}{\pi}$$

-Le nombre de sauts qu'effectue l'ingénieur spatial est appelé nombre K

- $K \in \mathbb{N}^*$  du fait que l'ingénieur ne peut pas s'arrêter durant un saut.

-Notre corde ou distance choisie est positive et ne doit pas dépasser le diamètre afin que le réparateur ne rentre pas en collision avec la paroi de la station.

-La distance est donc comprise dans l'intervalle  $] 0 ; 1/\pi ]$  km

Pour revenir à son point de départ, "y" doit donc appartenir à l'intervalle  $] 0 ; \frac{1}{2} [$  km.

Ainsi, pour que l'ingénieur revienne au point de départ, le nombre de sauts multiplié par y doit revenir au point de départ soit  $ky \in \mathbb{N}$  c'est à dire, un multiple de 1 km.

$K \in \mathbb{N}^*$  et  $y \in \mathbb{Q}$  donc y de la forme  $a/b$  avec a et b dans  $\mathbb{N}$  donc si on prend  $k = b$  alors on a  $b \cdot a/b$  donc les b s'annulent et on obtient "a" qui appartient à  $\mathbb{N}$  donc le résultat aussi. (2)

Pour l'instant, la seule réponse que nous pouvons apporter est que les distances pour lesquelles le réparateur ne reviendra pas au point de départ sont celles où "c" donne un "y" irrationnel.

Ce qui nous permet d'avancer cela est la démonstration qui montre que le produit d'un rationnel et d'un irrationnel ne donne pas un rationnel car si "y" était un irrationnel, le résultat de  $Ky$  le serait aussi:

(Théorème : Si r est un nombre rationnel non nul et x est un nombre irrationnel, alors  $r \times x$  est irrationnel. (3))

Démonstration par l'absurde :

Supposons que  $r \times x$  soit rationnel, où :

- r est rationnel et  $r \neq 0$
- x est irrationnel

Puisque  $r \times x$  est rationnel (par hypothèse), on peut l'écrire sous la forme  $p/q$  où p et q sont des entiers avec  $q \neq 0$ .

Donc :  $r \times x = p/q$

Puisque r est rationnel et  $r \neq 0$ , on peut l'écrire sous la forme  $a/b$  où a et b sont des entiers avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

En substituant dans notre équation :  $(a/b) \times x = p/q$

En résolvant pour x :  $x = (p/q) \div (a/b) = (p/q) \times (b/a) = (p \times b)/(q \times a)$

Puisque p, b, q et a sont tous des entiers, et que  $a \neq 0$  et  $q \neq 0$ , nous avons que  $(p \times b)$  et  $(q \times a)$  sont des entiers avec  $q \times a \neq 0$ .

Cela signifie que x peut s'écrire comme le quotient de deux entiers, donc x est rationnel.

Mais ceci contredit notre hypothèse initiale que x est irrationnel.

Conclusion : Notre supposition était fautive. Donc  $r \times x$  ne peut pas être rationnel, il est nécessairement irrationnel.)

- **3.3 Question 3: Connaître le nombre de sauts que le réparateur devra effectuer pour rentrer au sas de sortie.**

Le nombre de sauts que le réparateur devra effectuer pour rentrer au sas de sortie (point de départ) est le facteur K devant "y" donnant un entier naturel le plus petit possible.

## 4 Conclusion

En somme, à l'aide la question 1, nous nous approprions le sujet et utilisons divers outils, ce qui permet de répondre aux autres questions. Ainsi, nous avons découvert que l'ingénieur ne peut retourner à son point de départ que si "y" est un rationnel. Cela ne répond pas à la question car pour cela il faudrait trouver le(s) domaine(s) de définition pour le(s)quels "c" ne donne pas un "y" appartenant aux irrationnels. Enfin, le nombre de sauts que le réparateur devra effectuer pour rentrer au sas de sortie est le facteur K devant y.

### Notes d'édition

**(1)** Il y a un conflit de notations ici : « C » désigne à la fois un point et une longueur.

**(2)** Ce sous-paragraphe justifie que si y est un nombre rationnel, alors l'ingénieur peut revenir à son point de départ.

**(3)** Ce théorème montre que si y est irrationnel, alors l'ingénieur ne peut pas revenir à son point de départ