

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

SAUTS DE PUCE

Article rédigé par : **Anna Harari, Elettra Zanni, Marta Alvarez, Giacomo Zanni, Philippe Arduini et Oscar Piana**,
élèves de terminale, année scolaire 2024-2025

Établissement : **Lycée Stendhal de Milan**, Italie

Enseignant : **Dominique De Luca**

Chercheur : **Emmanuel Militon**, maître de conférence au laboratoire J.A. Dieudonné, Université Côte d'Azur

Une partie des résultats a été présentée au Congrès MATH.en.JEANS de Marseille 2025.

Présentation : L'objet de ce travail est d'étudier des trajectoires périodiques d'images de nombres, dits sauts de puce, par une fonction continue de $[0 ; 1]$ dans $[0 ; 1]$.

Sujet :

Une puce se déplace sur une table en effectuant des sauts. On repère la position de la puce sur la table à l'aide d'un nombre dans l'intervalle $[0 ; 1]$. On sait exactement comment se déplace la puce : on a une fonction $f: [0 ; 1] \rightarrow [0 ; 1]$ continue telle que, si la puce se trouve en une position x à un instant donné, elle se trouvera en position $f(x)$ à la fin de son saut suivant.

On dira que la puce a une trajectoire périodique de période $n \geq 1$, si après n sauts, elle revient pour la première fois à sa position initiale. Elle répétera alors indéfiniment cette même séquence de n sauts.

Questions pour commencer

On commence par étudier le cas où f est l'application suivante.

$$f: [0 ; 1] \rightarrow [0 ; 1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x \text{ si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pour quelles positions initiales la puce a-t-elle une trajectoire périodique de période 1,2,3, 4, 5 et $n \geq 5$ en général ? Si on lâche au hasard la puce sur la table, ses positions ultérieures auront-elles plutôt tendance à se répartir équitablement sur toute la table ou, à l'inverse, restera-t-elle la plupart du temps sur un petit espace de la table ?

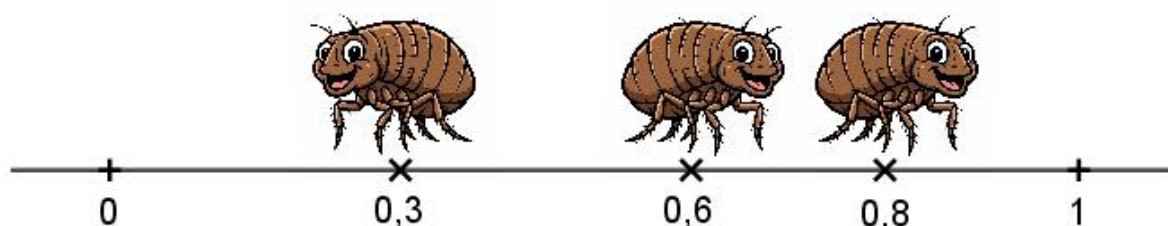
Questions pour poursuivre

Peut-on trouver $f : [0 ; 1] \rightarrow [0 ; 1]$ continue de sorte que la puce a des trajectoires périodiques de période 2 mais pas de trajectoire périodique de période 3 ? ou encore de sorte que la puce a des trajectoires périodiques de période 3 mais pas de trajectoire périodique de période 2 ? Même question avec des périodes p et q quelconques.

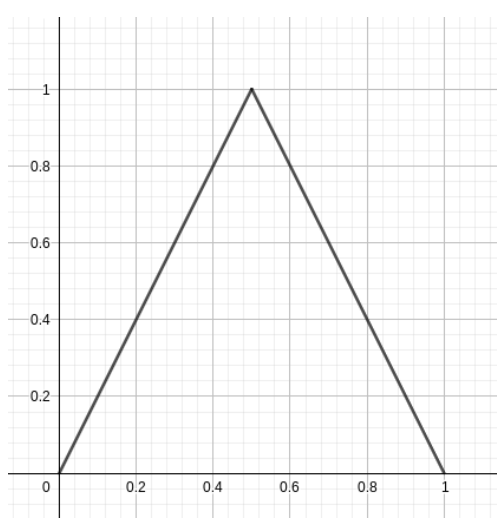
En hommage à François Parreau.

Nous nous intéressons à une fonction continue définie sur $[0 ; 1]$ et renvoyant une image appartenant à ce même intervalle $[0 ; 1]$. Soit $f(x) = 2x$ pour tout x appartenant à $[0 ; 0,5]$ et $f(x) = 2-2x$ pour tout x appartenant à $[0,5 ; 1]$. Ainsi, il faut imaginer une puce dont x serait le point de départ à partir duquel la puce saute selon une trajectoire donnée par la fonction f et dont $f(x)$ est le point d'atterrissage.

Par exemple, si la puce se trouve en $0,3$, comme $0,3 \in [0 ; 0,5]$, alors $f(0,3) = 2 \times 0,3 = 0,6$. En un saut, elle se retrouve en $0,6$. Comme $0,6 \in [0,5 ; 1]$, $f(0,6) = 2 - 2 \times 0,6 = 0,8$. Au saut suivant, la puce se retrouve en $0,8$. Et ainsi de suite.

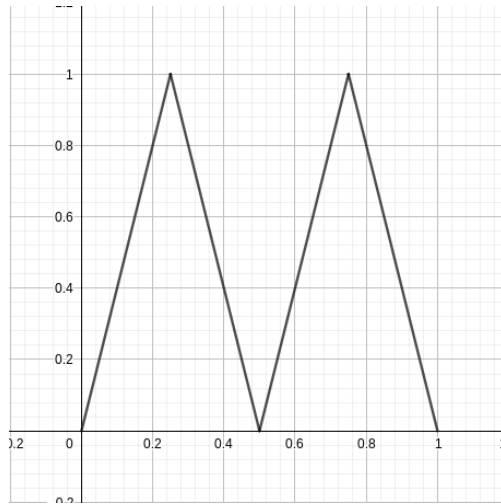


Cette fonction peut être employée dans la modélisation de l'évolution d'une population animale en fonction des ressources à sa disposition. Ainsi, une valeur égale à 0 représenterait la disparition d'une espèce, tandis que la valeur 1 serait la population maximale que l'on peut atteindre.



Représentation graphique de $f(x)$

Intéressons nous à la périodicité de cette fonction, c'est-à-dire, si c'est possible, le nombre de fois qu'il faut appliquer à x la fonction f pour que la puce revienne à son point de départ soit à cette même valeur de x .

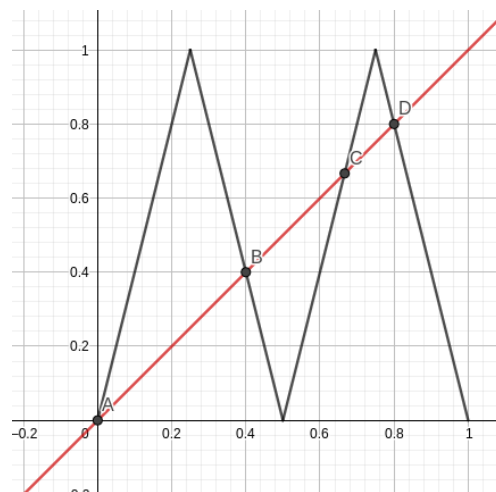


Représentation graphique de $f^2(x) = f \circ f(x) = f(f(x))$

Par définition, si la puce a une trajectoire périodique de période n , elle retournera à sa position initiale x après n sauts.

Or la puce saute selon la fonction f , c'est-à-dire que sa position est de $f^n(x)$ après n sauts. [exemple : si la position initiale de la puce est de x , alors sa position après 1 saut est de $f(x)$ ou $f^1(x)$].

Si la puce retourne sur sa position initiale après n sauts alors $f^n(x) = x$. Donc les solutions de $f^n(x) = x$ sont toutes les valeurs initiales de x qui donnent à la puce une trajectoire périodique de période n .



Modélisation de $f^2(x) = x$, on observe donc ici les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est périodique de période 2.

On a résolu les équations pour différentes puissances de f . Voici nos résultats :

- Période de 1 : 0 ; 2/3
- Période de 2 : 0 ; 2/3 ; 2/5 ; 4/5
- Période de 3 : 0 ; 2/3 ; 2/7 ; 4/7 ; 6/7 ; 2/9 ; 4/9 ; 8/9
- Période de 4 : 0 ; 2/3 ; 2/5 ; 4/5 ; 2/15 ; 4/15 ; 8/15 ; 14/15 ; 2/17 ; 4/17 ; 6/17 ; 8/17 ; 10/17 ; 12/17 ; 14/17 ; 16/17

Nous nous sommes donc aperçus que les valeurs de x pour lesquelles la fonction a une trajectoire périodique de période n sont des fractions ayant un nombre pair au numérateur et un nombre impair au dénominateur. On peut alors les noter $\frac{2k}{(2k'+1)}$ avec k' un entier naturel et k un entier naturel tel que $k \in [0 ; k']$.

Pour savoir si une valeur est périodique on s'intéresse alors **au dénominateur de x** qui semble être **impair**. On a alors réalisé un script Python qui nous renvoie les valeurs des dénominateurs des valeurs périodiques pour une période donnée.

```
w = int(input("Période : "))

def periodeur(p) :
    vn = 2
    d = 3
    denums = []
    while d < 10000:
        n = 0
        vn = 2
        while True:
            if 2 * vn < d:
                vn = vn * 2
            else:
                vn = (2 * d) - (vn * 2)
            n += 1
            if vn == 2:
                break
        if n == p:
            denums.append(d)
        d += 2
    return denums
print(periodeur(w))
```

Avec ces résultats on a créé un tableur contenant tous les dénominateurs pour chaque période. En l'étudiant, nous avons essayé de trouver une règle générale pour pouvoir trouver les valeurs de x qui donnent à la puce un trajectoire périodique d'une période donnée.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Périodes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	2		5	7	5	11	7	43	5	7	5	23
4	3			9	15		9		15	9	11	89
5	4				17	31	13		17	19	25	683
6	5					33	63		51	27	31	
7	6						65	127	85	57	33	
8	7						21	129	255	73	41	
9	8								257	511	93	
10	9									513	1023	
11	10									171	1025	2047
12	11										205	2049
13											341	

Grâce à ce tableau, nous pouvons conjecturer que les valeurs de x qui donnent à la puce une trajectoire périodique de période n ont un dénominateur de la forme 2^{n+1} , 2^{n-1} ou un de leurs diviseurs.

Intéressons-nous aux dénominateurs de ces fractions.

Démontrons par récurrence que pour tout entier $n > 0$,

$$f^n(x) = 2k + x \times 2^n \text{ avec } k \text{ un entier appartenant à l'intervalle } [-2^{n-1}+1 ; 0]$$

OU

$$f^n(x) = 2k - x \times 2^n \text{ avec } k \text{ un entier appartenant à l'intervalle } [1 ; 2^{n-1}]$$

Initialisation :

Pour $n = 1$

- Si $f^{n-1}(x)$, c'est-à-dire x , appartient à $[0 ; 0,5]$ alors $f(x) = 2x = 2k + 2^1x$ avec $k = 0$;
- Si $f^{n-1}(x)$, c'est-à-dire x , appartient à $[0,5 ; 1]$ alors $f(x) = 2-2x = 2k - 2^1x$ avec $k = 1$.

La propriété est vraie pour $n = 1$

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier q tel que $f^q(x) = 2k + 2^q x$ avec k entier de $[-2^{q-1}+1 ; 0]$ ou $f^q(x) = 2k - 2^q x$ avec k entier de $[1 ; 2^{q-1}]$.

Montrons que k est un entier relatif dans $[-2^{q+1} ; 0]$ ou que k est tout entier naturel dans $[1 ; 2^q]$.

- Si $f^q(x) \in [0 ; 0,5]$:
 $f^{q+1}(x) = 2(2k+2^q x) = 2(2k) + 2^{q+1}x = 2k' + 2^{q+1}x$ avec $k' = 2k$
 et sachant que k est un entier de $[-2^{q-1}+1 ; 0]$ alors k' est un nombre pair de $[-2^q+2 ; 0]$.

ou

$$f^{q+1}(x) = 2(2k-2^q x) = 2(2k) - 2^{q+1}x = 2k' - 2^{q+1}x \text{ avec } k' = 2k$$

et sachant que k est un entier de $[1 ; 2^{q-1}]$ alors k' est un nombre pair de $[2 ; 2^q]$.

- Si $f^q(x) \in [0,5 ; 1]$
 $f^{q+1}(x) = 2-2(2k+2^q x) = 2-2(2k+2^q x) = 2(1-2k) - 2^{q+1}x = 2k' - 2^{q+1}x$, avec $k' = 1-2k$
 et sachant que k est un entier de $[-2^{q-1}+1 ; 0]$ alors k' est un nombre impair de $[1 ; 2^q-1]$.

ou

$$f^{q+1}(x) = 2-2(2k-2^q x) = 2-2(2k-2^q x) = 2(1-2k) + 2^{q+1}x = 2k' + 2^{q+1}x$$
, avec $k' = 1-2k$
 et sachant que k est un entier de $[1 ; 2^{q-1}]$ alors k' est tout nombre impair de $[-2^q+1 ; -1]$

Donc

- On a bien
 $f^{q+1}(x) = 2k + x(2^{q+1})$ avec k un nombre pair de $[-2^q+2 ; 0]$

ou

$$f^{q+1}(x) = 2k + x(2^{q+1}) \text{ avec } k \text{ un nombre impair de } [-2^q+1 ; -1]$$

donc $f^{q+1}(x) = 2k + x(2^{q+1})$ avec k un entier de $[-2^q+1 ; 0]$

Ou sinon

- On a bien
 $f^{q+1}(x) = 2k - x(2^{q+1})$ avec k un nombre pair de $[2 ; 2^q]$

ou

$$f^{q+1}(x) = 2k - x(2^{q+1}) \text{ avec } k \text{ un nombre impair de } [1 ; 2^q-1]$$

donc $f^{q+1}(x) = 2k - x(2^{q+1})$ avec k un entier de $[1 ; 2^q]$

Dans les deux cas on obtient :

$$f^{q+1}(x) = 2k + x(2^{q+1}) \text{ avec } k \text{ un entier appartenant à l'intervalle } [-2^q+1 ; 0]$$

ou

$f^{q+1}(x) = 2k - x(2^{q+1})$ avec k un entier appartenant à l'intervalle $[1 ; 2^q]$.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, donc d'après le principe de raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout n appartenant à \mathbb{N}^* .

En considérant ce résultat, par calcul littéral:

$f^n(x) = x \Leftrightarrow 2k + x(2^n) = x \Leftrightarrow x(2^n - 1) = -2k \Leftrightarrow x = -2k/(2^n - 1) \Leftrightarrow x = 2k'/(2^n - 1)$ avec $k' = -k$
donc k' est un entier appartenant à $[0 ; 2^{n-1} - 1]$

ou

$f^n(x) = x \Leftrightarrow 2k - x(2^n) = x \Leftrightarrow x(2^n + 1) = 2k \Leftrightarrow x = 2k/(2^n + 1) \Leftrightarrow x = 2k/(2^n + 1)$ avec k un
entier appartenant à $[1 ; 2^{n-1}]$

En conclusion, les positions initiales qui donnent à la puce une trajectoire périodique de période de n sont toutes les valeurs de x telles que :

$x = 2k/(2^n - 1)$ avec k un entier appartenant à $[0 ; 2^{n-1} - 1]$

ou

$x = 2k/(2^n + 1)$ avec k un entier appartenant à $[1 ; 2^{n-1}]$.