

# Saut en hauteur

Année 2024-2025

Julie Ferris, Wanru Zheng, Cécile Rioual, élèves en classe de 2nd

Etablissement : LFI Charles de Gaulle (Pékin)

Enseignant : M. Guinard

Chercheurs : M. Plessis, M. Rittaud

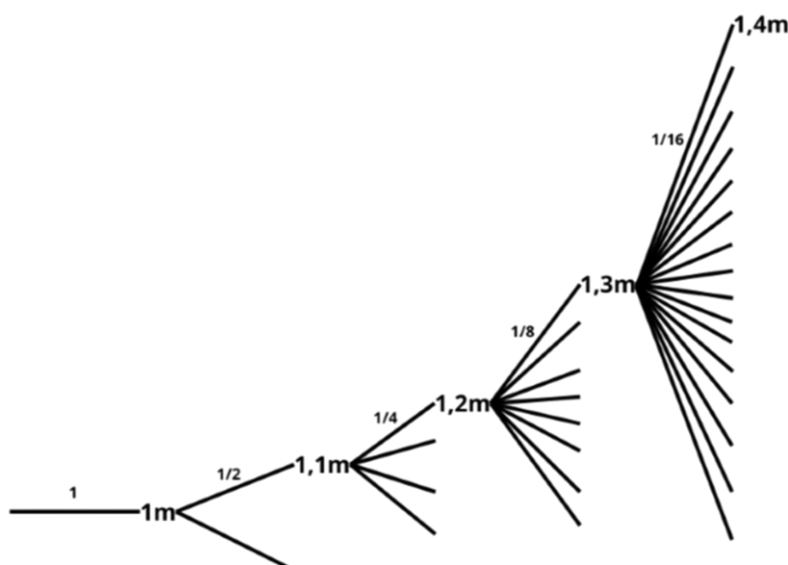
## 1. Introduction

### Présentation du sujet

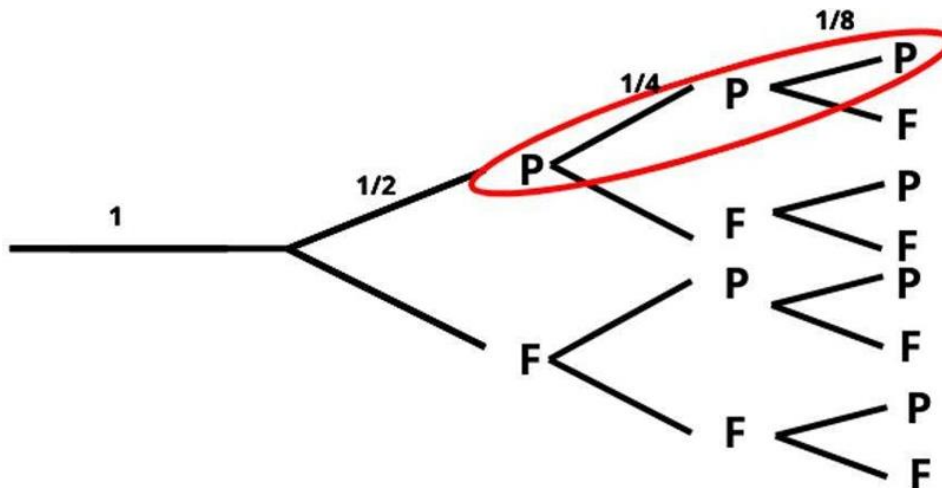
Un sportif essaye de franchir des hauteurs de saut de plus en plus grandes. Il franchit 1 mètre à chaque fois sans problème. Pour franchir 1,1 m, il a une chance sur 2 de réussir. Quand il essaye de franchir 1,2 m, il a une chance sur 4 de réussir, et ainsi de suite. Plus généralement, quand il essaye de franchir la hauteur de  $1+0,1n$  (en mètre), ou  $n$  est un entier, sa probabilité de succès est de  $1/2^n$ .

## 2. Simulations

Nous avons commencé par faire un arbre de probabilité pour modéliser la situation à la main



Pour simuler la situation à la main nous prenons une pièce. Nous lançons la pièce, si elle tombe sur face, le sauteur échoue et si elle tombe sur pile, le sauteur réussit les 1,1m et passe à la hauteur suivante donc 1,2m. Pour réussir 1,2m et passer à 1,3m, il faut relancer et faire pile 2 fois de suite. Pour réussir 1,3m et passer à 1,4m, il faut relancer et faire pile 3 fois de suite. Et ainsi de suite... Pour passer à  $1+0,1n$  m il faut faire pile  $n-1$  fois de suite.



Nous avons réalisé un programme python pour calculer la hauteur moyenne atteinte.

```
def prob(n):
    return (1/2**(n*(1+n)/2))*(1-1/2**(n+1))

def haut(n):
    return (1+n/10)

def moy(n):
    return(haut(n)*prob(n))

S=0
for n in range(30):
    S=S+moy(n)
print(S)
```

Résultats : environ 1,064

### 3.Calculs

#### 3.1. Probabilité de réussir ses essais

Hauteur 1+0,1n en mètre	1,0 (n=0)	1,1 (n=1)	1,2 (n=2)	1,3 (n=3)	1+0,1n
Probabilité de réussir	1 (franchit à chaque fois sans problème)	$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{2^n}$
Probabilité d'échouer	1-1=0	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$	$1 - \frac{1}{2^n}$

Avec l'arbre ci-dessus, il est possible de retrouver les probabilités ci-dessous :

- Probabilité de réussir jusqu'à 1,3m :

Pour atteindre 1,3m il doit d'abord réussir les sauts à 1,0m, 1,1m, et 1,2m

Nous multiplions la probabilité de succès de chaque hauteur individuelle pour trouver la probabilité de réussir toutes ses sauts jusqu'à 1,3m.

Donc la probabilité de réussir jusqu'à 1,3m est de :  $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

- Probabilité de réussir jusqu'à 1,3m mais pas plus loin :

Le sportif doit réussir tous les sauts jusqu'à 1,3m et échouer le saut à 1,4m

La probabilité de réussir jusqu'à 1,3m est de  $\frac{1}{64}$

La probabilité d'échouer 1,4m est de  $\frac{15}{16}$

Donc la probabilité de réussir jusqu'à 1,3m mais pas plus loin est de :  $\frac{1}{64} \times \frac{15}{16} = \frac{15}{1024}$ .

- Probabilité de réussir jusqu'à 1+0,1n, en fonction de n

La probabilité de réussir tous les sauts jusqu'à 1+0,1n m est de :

$$1 \times \frac{1}{2^1} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^3} \times \dots \times \frac{1}{2^n} = 1 \times \frac{1}{2^{(1+2+3+\dots+n)}} = \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Probabilité  $P_n$  de réussir jusqu'à 1+0,1n mais pas plus loin, en fonction de n :

$$(P \text{ de réussir}) \times (P \text{ d'échouer la prochaine hauteur}) = \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} \times \left(1 - \frac{1}{2^{(n+1)}}\right).$$

### 3.2. Moyenne

Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1

$$P_1 = 1 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}$$


$$P_2 = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{64}\right) + \dots = 1 - \frac{1}{\infty} = 1$$

$$\frac{1 \times P_0 + 1,1 \times P_1 + 1,2 \times P_2 + \dots + 1 + 0,1n \times P_n + \dots}{1} = ?$$



#### Notes d'édition

 Nous fournissons la suite du calcul, qui reflète le programme python des élèves.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1 + 0.1 * n)P_n = 1 + 0.1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \right).$$

Posons  $u_n = 2^{-n(n+1)/2}$ , de sorte que  $P_n = u_n - u_{n+1}$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} nP_n &= 0(u_1 - u_0) + 1(u_2 - u_1) + 2(u_3 - u_2) + 3(u_4 - u_3) + \dots \\ &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ &= 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-6} + 2^{-10} + \dots \\ &= 0.6416 \dots \end{aligned}$$

À  $10^{-5}$  près, l'espérance vaut 1.06416. Nous ne savons pas relier ce nombre à des nombres usuels.

