Un problème de distances

Année 2024-2025

Élèves en classe de Seconde : AKA-BILE Chris, BOISSON Roane, BURGAIN Lou, DERE Neslihan, LACHEHAB Aswan, MORANGE-GOULESQUE Ella-June, RABAT Thomas, RAULIN Juliette
Élèves de Première : BARTHELEMY Maelle, JAMAL ABOULHODA Rajae
Élève de Terminale : RABAT Gabriel

Etablissement : Lycée Georges Clémenceau, Reims

Enseignant : Nicolas Husson

Chercheur : Laurent Di Menza, Université de Reims Champagne-Ardenne

I) Introduction

En 2020, la pandémie de la covid-19 a suscité de nombreuses mesures de sécurité, l'une des plus connues étant la distanciation physique. Celle-ci nous a amené·es à nous poser la question suivante : Comment remplir le plus efficacement une salle en tenant compte de la distanciation physique ?

Afin de répondre à cette question nous avons développé plusieurs méthodes de placement de personnes. Voici un sommaire :

Nous allons tout d'abord présenter différentes méthodes dont celle des carrés, celle des triangles et la méthode ThomAswan. Nous verrons ensuite d'autre méthodes ainsi qu'une comparaison entre ces différentes procédures.

II) Les méthodes

Avant de commencer la présentation de nos méthodes, voici comment nous avons mené nos recherches. Après réalisation d'expériences pratiques avec du matériel géométrique afin de comprendre comment se matérialise la distanciation de manière mathématique, nous avons trouvé différentes choses que voici.

Tout d'abord, on va représenter chaque personne comme un point que l'on doit écarter d'une unité de distanciation par rapport aux autres points. On remarque très vite qu'une règle ne permet de distancer qu'en une dimension, et n'est donc pas pratique. Cependant, un compas représente très bien la distanciation sociale : chaque personne est le centre d'un cercle de rayon correspondant à la distanciation choisie.

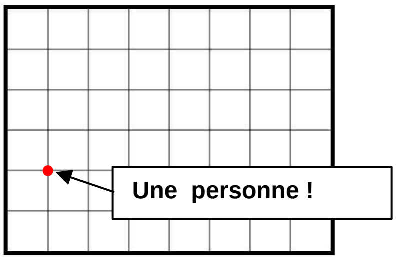
Cependant, comme il est difficile d'imbriquer des cercles entre eux, on laisse toujours une quantité de vide importante. Nous avons par conséquent décidé de créer des méthodes qui permettent (comme des recettes) de remplir la salle le plus efficacement possible. (1)

A noter que pour les méthodes utilisant des formes géométriques, on considère que les sommets de ces formes correspondent à l'emplacement des personnes.

1) Les carrés

1.1) Présentation

La méthode des carrés est la première méthode découverte. C'est une manière simple d'organiser l'espace afin d'y placer un maximum de personnes en respectant la distanciation physique (2). L'idée est simple : il s'agit de transformer la salle en un quadrillage de carrés, avec chaque personne se plaçant sur les sommets de ces carrés.



1.2) Limites et solutions

La méthode des carrés possède deux problèmes majeurs. Tout d'abord, si la longueur et la largeur de la salle ne sont pas des multiples de la distanciation, de la place est perdue (Figure 1). Ensuite, si la salle n'est pas un rectangle, beaucoup de place est perdue (Figure 2).

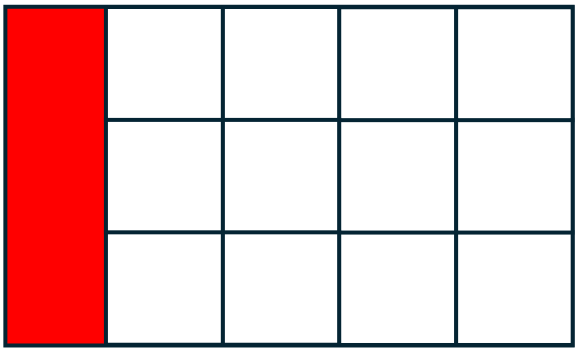


Figure 1

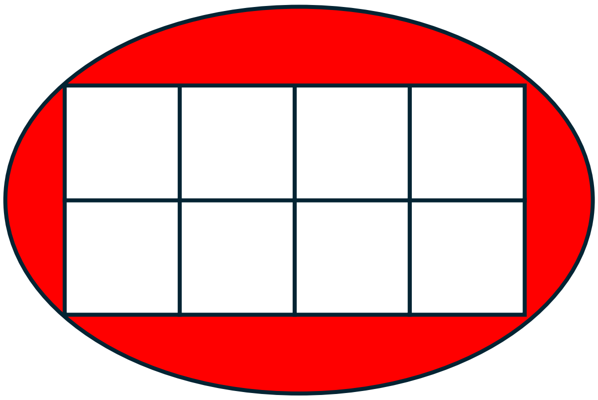


Figure 2

Une solution partielle mais fonctionnelle a été trouvée afin de régler le premier problème. Parfois, quand la taille restante est suffisante, on peut ajouter des triangles aux extrémités des carrés, formant ainsi la méthode des carrés optimisés (Figure 3). (3)

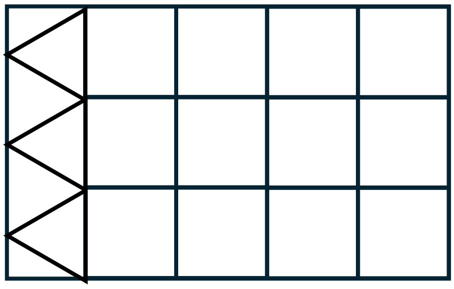
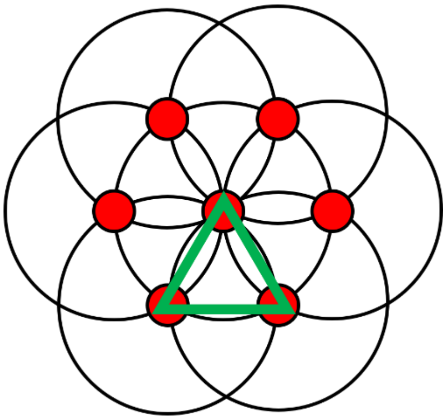


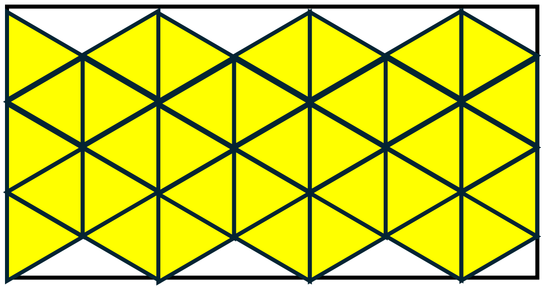
Figure 3

2) Les triangles

2.1) Présentation



La méthode des triangles est la deuxième grande méthode découverte. Celle-ci se base sur l'utilisation de triangles équilatéraux afin d'offrir une solution efficace. Cette forme vient du constat qu'en traçant un cercle, puis en ajoutant deux points posés sur ce cercle, symétriquement par rapport au centre, puis en traçant un cercle sur ces deux nouveaux points, les 4 points d'intersection entre ces deux cercles tracés et le cercle central étaient eux-mêmes distanciés entre eux d'une unité. Cela forme alors des triangles équilatéraux, la base de cette méthode. (4)

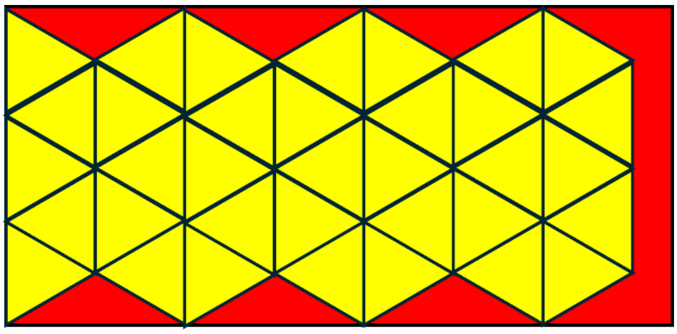


Pour la formation de cette méthode, on prend tout d'abord notre salle rectangulaire. On va ensuite tracer une ligne de triangles équilatéraux dont la base va toucher la largeur du rectangle (on verra pourquoi après). Ensuite, on trace une droite qui relie les sommets de ces triangles entre eux, puis on les duplique symétriquement par rapport à la droite tracée précédemment. Il suffit ensuite de reproduire cette forme jusqu'à la fin de la salle ! (5)

2.2) Limites et solutions

L'avantage principal de cette méthode par rapport à celle des carrés est que la hauteur du triangle est plus petite que la distanciation, ce qui fait que l'on gagne de la place à chaque nouvelle couche de triangles par rapport à la méthode des carrés. (6)

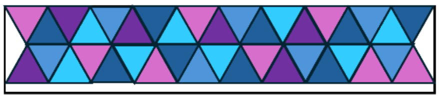
Pourtant, la méthode connaît quelques limites. Tout d'abord, quelle que soit la salle, il y aura des pertes sur le côté des triangles. Ensuite, si la salle n'a pas une longueur multiple de la hauteur d'un triangle, de la place est également perdue (espaces rouges sur la figure).



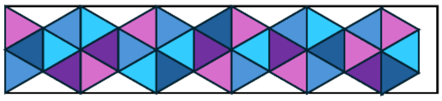
Nous n'avons pas trouvé de solution pour le premier problème, mais le deuxième problème peut être réglé avec la méthode combinatoire, présentée plus bas.

2.3) La L.E.R

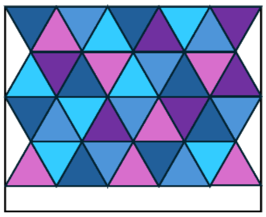
La L.E.R (Lou, Ella-June et Roane) a pour but de répondre à une question sur la méthode des triangles : est-il mieux de disposer les triangles d'une longueur à l'autre ou d'une largeur à l'autre ? Pour y répondre nous avons décidé de tester les deux possibilités sur deux rectangles d'aires égales ($500m^2$) mais de côtés différents (10x50 et 20x25). Cela nous a permis de déterminer que peu importe l'aire ou la taille des côtés de la salle, le plus efficace sera toujours de disposer les triangles en allant d'une largeur à l'autre. (7)



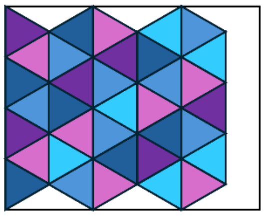
Longueur-longueur : 606 personnes



Largeur- largeur : 609 personnes

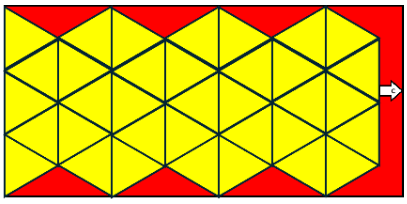


Longueur-longueur : 595 personnes



Largeur-largeur : 612 personnes

On peut se demander si on remplit efficacement la salle. Pour cela, on détermine l'aire jaune d'un triangle équilatéral puis, le nombre de semi-triangles équilatéraux, qu'on divise par 2, pour obtenir le nombre de triangles équilatéraux « pleins », dont l'espace n'est pas occupé, et ainsi, trouver leur aire, en faisant le produit, du quotient obtenu et l'aire d'un triangle équilatéral. Ensuite, on calcule l'aire de la « bande de vide », puis on additionne nos deux résultats (le produit ci-contre + l'aire de la « bande de vide »), et ainsi soustraire à l'aire totale, la somme obtenue.



$$A_{\text{bande de vide}} = l \times c$$

Légende :
t.e => triangle(s) équilatéral(aux)
c => distante restante

$$A_{t.e} = \frac{b \times h}{2}$$

$$h = c \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{espace non-occupé t.e}} = l \times c + \frac{nb\ t.e}{2} \times A_{t.e}$$

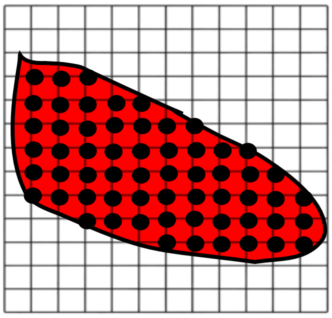
$$A_{\text{espace occupé}} = \left(l \times c + \frac{nb\ t.e}{2} \times A_{t.e}\right) - A_{\text{totale}}$$

3) La méthode ThomAswan

3.1) Présentation

La méthode ThomAswan est l'association de deux noms de nos chercheurs étant : Thomas et Aswan.

C’est une méthode réalisée sur Scratch qui consiste concrètement à prendre la figure de la salle étudiée de dimensions et de formes quelconques et de créer autour de cette figure un rectangle de côté égal à un multiple de la distanciation physique. Il faut ensuite créer un quadrillage dans ce rectangle avec les méthodes des carrés ou des triangles vues précédemment. Puis on relève le nombre de points rencontrés à chaque intersection dans la figure de la salle étudiée : ces points représentent des personnes. Enfin on compare le nombre de points relevés avec la méthode des carrés et celle des triangles. Le programme est disponible en annexe.



3.2) Utilité et limites

La méthode ThomAswan reste une méthode simple et visuelle mais elle permet l’étude rapide de formes complexes, d’autant plus qu’elle permet d’étudier n’importe quelle forme de n’importe quelle taille assez facilement puisqu’il suffit de l’encadrer. (8)

Cependant, sa réalisation sur Scratch ne nous permet pas d’être dans la précision la plus totale mais elle nous permet tout de même de déterminer quelle méthode va être plus efficace ainsi qu’une approximation du nombre total de personnes par méthode.

III) Autres découvertes

1) Le “Carrangle“

1.1) Présentation

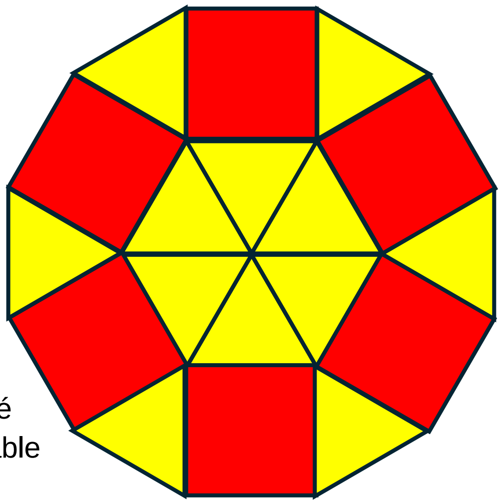
Le “ Carrangle“ est lui aussi une association des noms : carré et triangles. Voici sa définition : le Carrangle est une figure géométrique composée de carrés et de triangles agencés pour former un dodécagone.

Voici son procédé de construction :

1) Tracer un hexagone régulier composé de 6 triangles équilatéraux identiques

2) Ajouter sur chaque face un carré (6 au total) de même longueur de côté que les triangles précédents

3) Relier chaque carré pour former 6 autres triangles équilatéraux égaux et ainsi un dodécagone



Le Carrangle présente par ailleurs une particularité intéressante : c’est une figure régulière duplicable et imbriquable à l’infini, créant un carrangle toujours plus grand. (9)

1.2) Utilité

Le Carrangle a été pensé dans un premier temps afin de pouvoir remplir des espaces complexes comme des figures circulaires ; c’est une configuration optimisée et qui reste simple tout en maintenant la distance sécuritaire entre les individus. Cependant, ce ne sont que de simples suppositions car son utilité n’a pas été démontrée. (10)

2) La méthode combinatoire

2.1) Présentation

La méthode combinatoire est une méthode qui combine les méthodes des carrés et des triangles vues précédemment, afin, grâce à une série de tests, de déterminer un placement des personnes optimisé dans la salle.

Pour ceci, on prend tout d'abord une salle rectangulaire. On crée une variable A qui correspond concrètement au nombre de lignes de triangles. Celle-ci est initialisée à 0 au départ (dans la figure 4, on illustre l'étape où A=1). On commence en première étape par tracer 2A lignes de triangles avec la méthode des triangles fois la variable A, de largeur à largeur (figure 4). (11) On va ensuite continuer de remplir la salle en utilisant la méthode des carrés (figure 5). Enfin, on ajoute des triangles aux extrémités s'il reste la place (figure 6).

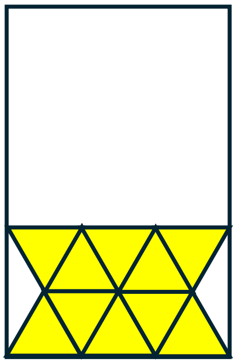


Figure 4

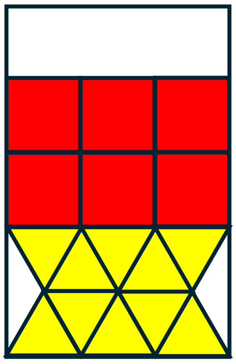


Figure 5

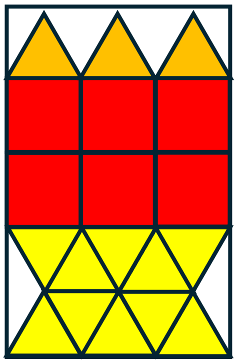


Figure 6

Après ceci, on marque le nombre de personnes obtenues, puis on ajoute 1 à notre variable A, et on recommence le protocole.

Lorsque l'on ne peut plus mettre A lignes de triangles, car les derniers triangles formés dépassent la salle, alors on remet A à 0, et on recommence tout le protocole en partant cette fois-ci de la longueur. Enfin, il suffit de prendre le plus grand nombre de personnes que l'on a obtenu entre les méthodes.

<u>Exemple de toutes les dispositions avec une salle</u> :

1 – Sens : largeur-largeur / A=0

2 – Sens : largeur-largeur / A=1

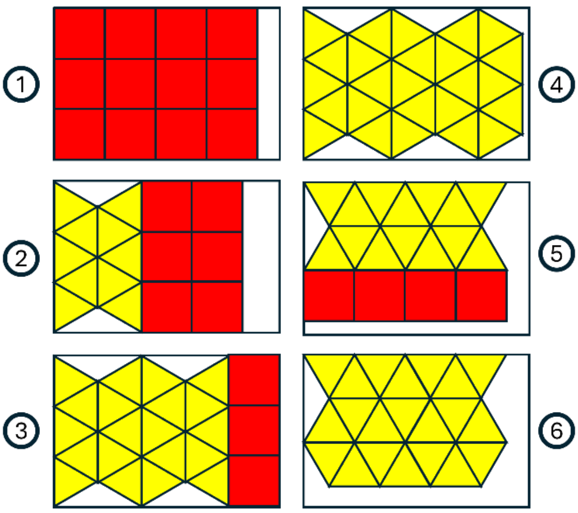
3 – Sens : largeur-largeur / A=2

4 – Sens : largeur-largeur / A=3

5 – Sens : longueur-longueur / A=1

6 – Sens : longueur-longueur / A=2

On remarque qu'il n'y a pas de « longueur-longueur / A=0 », car cela revient au même que le numéro 1.



2.2) Utilité et limites

Le gros avantage de cette méthode est qu'elle permet de tester toutes les dispositions de carrés et de triangles suivant la méthode des carrés et des triangles, tout en respectant la distanciation physique. Si elle permet parfois d'avoir de meilleures solutions que les carrés ou les triangles seuls, c'est car la combinaison des deux méthodes permet de combler le vide que l'on observait sur des méthodes précédentes.

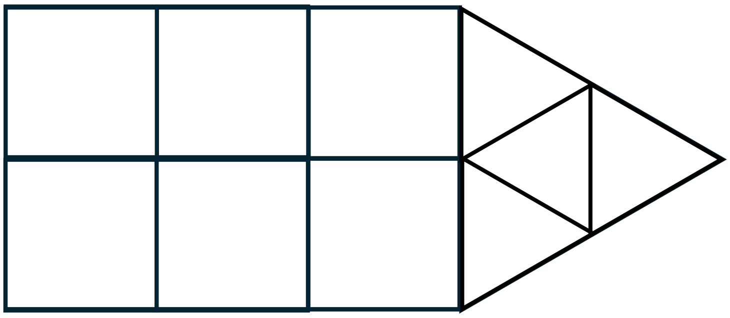
Cependant, elle a quelques inconvénients. En effet, cette méthode ne teste pas toutes les dispositions de carrés et de triangles possibles, car celles-ci sont nombreuses et imprévisibles. De plus, comme elle est issue de la méthode des carrés et des triangles, elle possède les mêmes défauts que ces dernières, mais reste au minimum aussi efficace qu'elles.

3) La séparation (12)

3.1) Présentation

La méthode de la séparation peut paraître évidente, mais elle est très importante à développer. Celle-ci consiste simplement à séparer des pièces de formes complexes en formes plus simples, afin de remplir ces espaces avec les différentes méthodes précédentes.

Par exemple, on peut prendre une partie rectangulaire et la remplir avec la méthode des carrés.



3.2) Utilité et limites

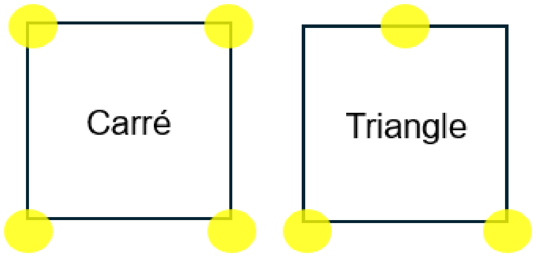
Cette méthode est efficace car elle permet de remplir des pièces complexes en les simplifiant en forme plus simples. Cependant, certaines pièces comme des cercles ne peuvent pas être remplies par cette méthode. Elle reste alors aussi efficace ou moins que les autres.

IV) Comparaison de méthodes

Quelle méthode donne les meilleurs résultats ?

Il convient de rappeler que nous avons choisi un plan en deux dimensions puisque pour profiter pleinement d'un cours, il faut se trouver à la même hauteur que l'enseignant. (13)

Jusqu'ici les deux meilleures méthodes pour une salle rectangulaire ont été les méthodes des triangles et des carrés. (14) Même si pour un carré d'un mètre par un mètre, la plus rentable semble être celle des carrés, nous ne savons pas si c'est toujours le cas pour des valeurs plus grandes. (15)



C’est pourquoi, nous avons créé un programme qui calcule le nombre d’élèves que l’on peut placer dans une salle avec chaque méthode et renvoie celle dont le résultat est le plus élevé. Toutes ces valeurs ont été répertoriées dans le tableau ci-dessous :

l/L	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
2	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
3	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64
4	10	15	20	25	30	35	41	45	50	55	60	65	72	77	81
5	12	18	24	30	36	42	50	55	61	66	72	78	88	94	99
6	14	21	28	35	42	49	59	65	72	78	85	91	104	111	117
7	16	24	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140
8	18	27	36	45	55	65	77	85	95	105	115	125	136	145	155
9	20	30	40	50	61	72	86	95	105	116	127	138	152	162	171
10	22	33	44	55	66	78	95	105	116	126	138	150	168	179	189
11	24	36	48	60	72	85	104	115	127	138	150	163	184	196	207
12	26	39	52	65	78	91	113	125	138	150	163	175	200	213	225
13	28	42	56	72	88	104	122	136	152	168	184	200	216	232	248
14	30	45	60	77	94	111	131	145	162	179	196	213	232	247	264
15	32	48	64	81	99	117	140	155	171	189	207	225	248	264	279

Méthode des carrés > Méthode des triangles
Méthode des carrés = Méthode des triangles
Méthode des carrés < Méthode des triangles

Résultats : (16)

- Si un des côtés est inférieur ou égal à 3, il vaut mieux utiliser la méthode des carrés.
- Si les deux côtés sont inférieurs ou égaux à 6, il vaut mieux utiliser la méthode des carrés.
- Lorsque l’un des côtés mesure plus de 13 et que l’autre ne répond pas à la première condition, il vaut mieux utiliser la méthode des triangles.

V) Conclusion

Pour conclure, il existe plusieurs façons d’organiser une salle tout en respectant la distanciation physique, mais deux méthodes ressortent particulièrement : celle des carrés et celle des triangles. (17) Nous pouvons également noter la méthode ThomAswan, qui est assez intéressante pour des formes de salle complexes. Cependant, leur efficacité dépend surtout de la taille et de la forme de la salle. Il n’existe donc pas de solution unique ou toute faite, car chaque espace a ses propres contraintes.

Dans cet article nous avons essayé de répondre au placement optimisé de personnes à l'intérieur d'une salle donnée, mais quelle serait la forme de la salle la plus adaptée à la distanciation physique ?

Annexe

Le programme Scratch : https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

Notes d'édition

(1) Il n'est pas clair que l'utilisation de cercles ne puisse pas donner de configuration intéressante du point de vue de l'optimisation. En effet, si l'on trace des cercles tous tangents les uns à d'autres de façon à laisser le moins d'espace en dehors des disques ainsi délimités, alors en plaçant une personne dans chaque espace vide, on n'enfreint pas la règle de distanciation. Autrement dit, les disques bordés par les cercles ne sont pas forcément disjoints… Les auteurs semblent ici avoir perdu de vue le fait que le problème n'est pas de remplir l'espace avec des formes géométriques sans qu'elles se superposent, mais bien d'espacer suffisamment des points.

(2) Il ne s'agit pas de placer un maximum de personnes dans la salle, mais un certain nombre.

(3) On ne règle pas de problème, mais on place davantage de personnes dans la pièce qu'avec la première méthode. On peut regretter qu'aucun calcul n'ait été mené dans ce paragraphe (si la pièce est rectangulaire, combien de personnes peut-on y mettre en utilisant les deux méthodes, en fonction des dimensions de la pièce et de la distanciation choisie ?)

(4) Il faudrait prouver le résultat avancé ici (“les quatre points (...) sont distanciés d'une unité”). De plus, le lien avec le paragraphe suivant n'est pas évident.

(5) On ne peut pas parler de “la” base d'un triangle équilatéral. Il s'agit d'un de ses côtés. Ce dernier ne “touche” pas la largeur du rectangle, mais est inclus dedans. Ce n'est pas la première “ligne de triangles” que l'on “duplique symétriquement”, mais la première “ligne” ainsi que la seconde, dont les triangles sont placés en quinconce.

(6) il n'est absolument pas évident que cette méthode permette toujours de positionner davantage de personnes que la méthode des carrés. En effet, si l'on regarde la figure en-dessous, on place sur la largeur gauche du rectangle autant de personnes avec les deux méthodes : 4. Mais on a ensuite trois sommets avec les triangles et si le rectangle est suffisamment large pour insérer une deuxième colonne de carrés, mais pas de triangles supplémentaires, alors on a placé 8 personnes avec la méthode des carrés, mais 7 avec la méthode des triangles.

(7) Le fait d'obtenir un résultat sur deux cas particuliers ne permet pas d'extrapoler et d'en faire une généralité… Il n'y a aucun calcul justifiant quoi que ce soit et c'est particulièrement inquiétant puisque sur le schéma de gauche, il y a plus de triangles dans la configuration “longueur-longueur” que dans la configuration “largeur-largeur”, contrairement à ce qui est annoncé. On peut penser que la variation entre les calculs menés et le schéma donné en exemple est dû au fait que le résultat dépend de la distanciation choisie, dont il n'est fait aucune mention ici. Les élèves ont probablement choisi une valeur de distanciation fixée qui leur a donné les résultats qu'ils donnent ici.

De plus, il semble être considéré que la largeur et la longueur du rectangle est toujours un multiple de la distanciation (qui est donnée par la longueur des côtés des triangles équilatéraux), mais cela n'est pas explicité, ni justifié. Par la suite, la question de savoir si la salle est “efficacement remplie” n'a que peu d'intérêt ici, puisque, encore une fois, on ne cherche pas à paver la salle. Il est toutefois regrettable que le nombre de triangles équilatéraux n'ait pas été calculé explicitement.

(8) Ce n'est pas une méthode à proprement parler, mais un algorithme permettant de déterminer, parmi les méthodes présentées précédemment, laquelle est la meilleure.

(9) Que signifie l'expression « duplicable et imbricable à l'infini » ?

(10) Il est dommage que l'utilité de ce carrangle n'ait pas été un minimum étudiée : en considérant une pièce circulaire à peupler, on aurait pu construire un carrangle auquel ledit cercle est circonscrit, puis comparer avec les méthodes des carrés et des triangles.

(11) Pourquoi ne pas tracer une seule ligne de triangle à chaque étape ?

(12) Cette partie a été trop peu développée pour présenter un quelconque intérêt.

(13) Quel est l'intérêt de cette phrase ?

(14) « Les deux meilleures méthodes » : ce sont les seules qui ont été évoquées.

(15) Cette phrase est beaucoup trop vague : “semble” ; “valeurs plus grandes”, sans tenir compte du paramètre “distanciation”, qui a son importance.

(16) Dans cette partie : une idée intéressante et qui contient quelques résultats substantiels. Il manque cependant le programme évoqué, qui en est l'élément crucial.

(17) Pourquoi les deux méthodes (carrés et triangles) ressortent-elles particulièrement ? Ouverture intéressante dont on aimerait connaître un début de réponse.