Virus sur le carré !

Année 2024 – 2025

RATHEEPAN Jipishan, BAKIR Kenza, KHIAR Aya, KHIARI Sarra, SENTHIVEL Kiruthiga, RONALD KINGSLEY Archana, SUGANTHAN Lowjan, élèves de seconde

Établissements : Lycée Germaine Tillion, Le Bourget 93 350

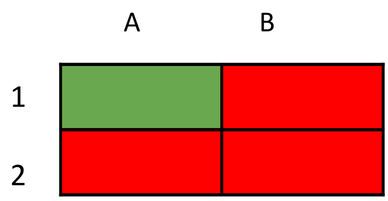
Enseignant·es : Boucher Isabelle, Firozaly Jérémy, Alec de Bonet d'Oléon

Chercheur : Guillaume Garnier, Laboratoire Jacques Louis-Lions

1. Introduction

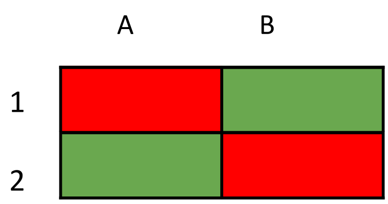
1.1. Présentation du sujet

Le sujet que nous avons traité cette année est "L'épidémie", il nous a été présenté par le chercheur Guillaume Garnier. Ce sujet consiste à soigner toutes les cases malades sur un carré $n \times n$. Pour s'y retrouver dans les carrés, nous avons fait le choix d'établir des repères en numérotant horizontalement par des lettres et verticalement par des chiffres. Par exemple, nous avons ci-dessous un carré de taille 2×2 sur lequel il y a trois malades situés sur les cases B1; B2 et A2 ainsi qu'une personne saine en A1 (que nous représenterons respectivement en rouge et vert).



Pour guérir les cases, il nous est permis de changer le statut d'une ou plusieurs de celles-ci, cela signifie les rendre malades si elles étaient saines et inversement. Cependant lorsqu'on modifie le statut d'une case, cela modifie également celui des cases adjacentes (cases voisines) à celle-ci.

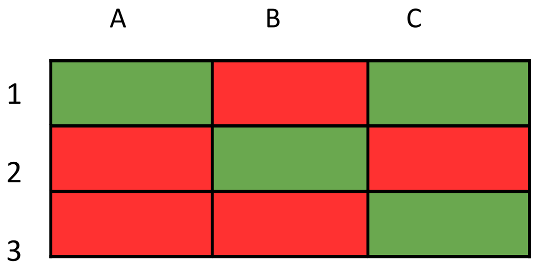
Par exemple, si on change le statut de la case A1 dans le schéma ci-dessus, cela va modifier l'état des cases adjacentes B1 et A2 comme représenté par le schéma ci-dessous.



Dans un premier temps nous allons démontrer quelques résultats sur les solutions à l’aide des matrices puis, dans un second temps, des résultats sur des carrés de différentes tailles : 2×2 ; 3×3 ; 4×4 et 5×5.

1.2.Utilisation des matrices pour représenter le problème

Pour démontrer nos conjectures (voir plus bas dans la section), nous avons modélisé le problème avec des matrices composées de nombres que l’on appellera des nombres binaires. Chaque case est représentée par un chiffre : 0 pour sain et 1 pour malade. Par exemple, on peut transformer ce tableau en la matrice suivante :



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les règles de calcul dans la numération binaire sont différentes de celles de la numération usuelle. Les voici :

- 0 + 0 = 0
- 1 + 0 = 1
- 0 + 1 = 1
- 1 + 1 = 0

Lorsque l’on change le statut d’une case, on ajoute une matrice composée de 0 et de 1. “1” correspond à un changement de statut et “0” à aucun changement. Si on veut changer le statut de la case du milieu, cela revient à ajouter à notre matrice de départ la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons en déduire deux choses :

- **L'ordre ne compte pas**

En effet, puisque nous faisons des additions, les opérations sont commutatives. Par exemple, ce calcul donne le même résultat que le précédent :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut modifier le statut des cases dans l’ordre que l’on veut. (1)

- **Il ne sert à rien d'appuyer deux fois sur une même case.**

En effet, on sait qu’appuyer deux fois de suite sur une même case revient à annuler son coup et que l’ordre ne compte pas. Ainsi, appuyer 2 fois sur une même case dans une même solution est inutile.

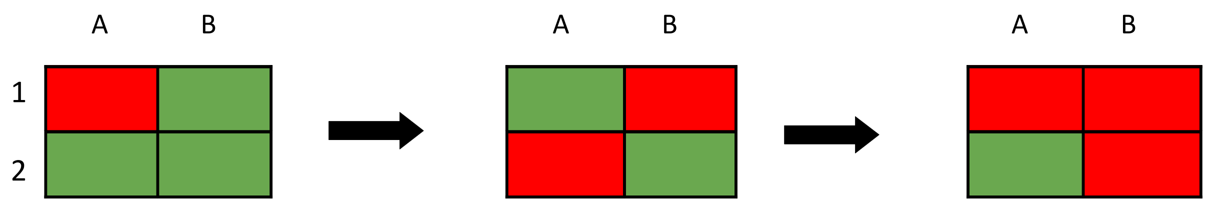
On peut généraliser : changer le statut d’une case un nombre pair de fois signifie que l’on ne change rien.

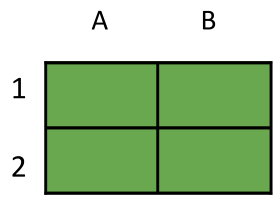
Maintenant que ces 2 résultats sont établis, nous pouvons passer aux solutions trouvées pour les carrés de différente tailles.

2.Résultats sur des carrés de différentes tailles

2.1.Le carré 2x2

Nous avons commencé nos recherches sur un carré en ayant un malade sur la case que nous avons nommée A1, cette case est alors soignée, automatiquement les cases adjacentes c’est-à-dire les cases A2 et B1 sont rendues malades, puis A2 est soignée, A1 et B2 sont malades, B1 est soignée en n’oubliant pas de changer l’état des cases A1 et B2.





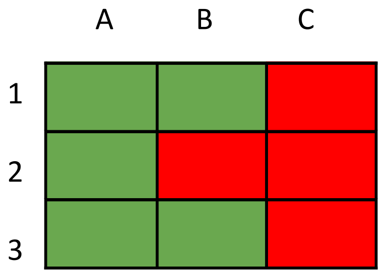
2.2. Le carré 3x3

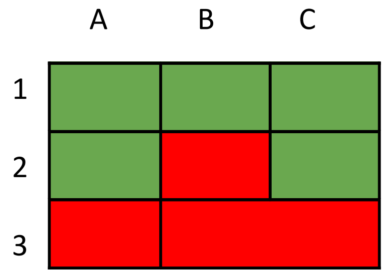
Nous avons commencé par chercher des solutions pour un départ avec un malade placé au milieu, sur le côté ou dans les coins.

Les solutions que nous avons trouvées pour ce carré avec un malade sont :

- C2; B1; A2; B2; B3 pour un malade en B2
- B2; A3; B3; C3 pour un malade en B1
- A3; C2; B1; C3; A1 pour un malade en C3 (2)

Nous n’avons pas besoin de trouver les solutions pour les 6 autres cases. En effet, en tournant le carré à 90 ° on se rend compte que plusieurs situations sont équivalentes, par exemple, les deux situations suivantes sont équivalentes :





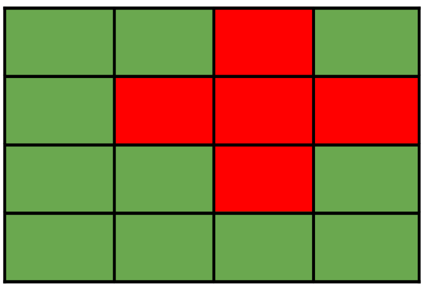
Une fois que nous avons trouvé les solutions avec le début de n'importe quelle case du carré 3*3, nous avons commencé à trouver les solutions avec des combinaisons de deux cases. Nous mettons ces solutions en page annexe.

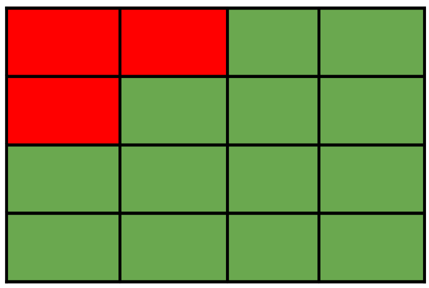
2.3.Le carré 4x4

Nous allons nous intéresser au carré 4x4

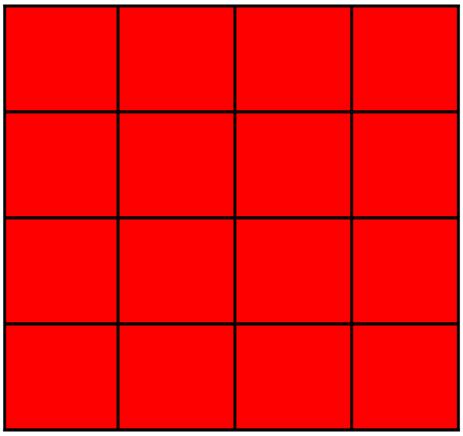
Au début, nous avons essayé de résoudre ce problème en étendant la solution trouvée pour un quadrillage 3x3, cela n'a pas été une bonne idée puisque nous n'avons pas réussi. De toute manière, aucune idée n'aurait pu être bonne puisque s'il n'y a qu'un seul malade au début, il n'existe aucune solution. Nous n'avons pas été en mesure de le démontrer mais cela nous a été apporté par un algorithme donné par le chercheur à la fin de notre atelier.

Il existe néanmoins des solutions avec certaines dispositions de départ. Par exemple, on peut guérir tous les malades si toutes les cases sont malades au départ. On a évidemment des solutions si il y a 3 ou 4 malades au début disposés de la bonne manière comme dans les exemples suivants :





Il existe une solution lorsque toutes les cases sont malades au départ, vous pouvez essayer de la trouver par vous-même (la solution est indiquée en petit en bas à droite) :



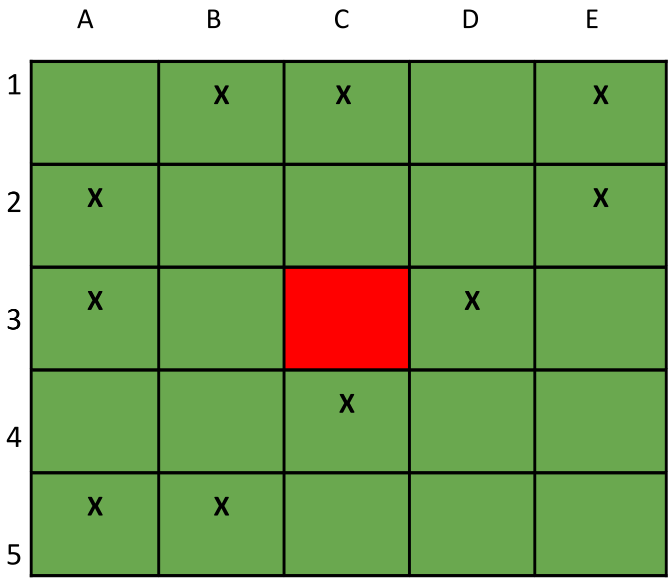
Solution : A2 ; B4 ; C1 ; D3

2.4.Le carré 5x5

Comme pour les tailles précédentes nous avons commencé par nous intéresser au problème avec une seule case malade que nous avons placée au centre. Cela devenait beaucoup plus dur que dans les cas du carré de taille 2×2 ou 3×3. La solution est :

- A2;A3;A5;B1;B5;C1;C4;D3;E1;E2

On peut aussi directement tracer cette solution sur le carré de départ en notant avec un « X » les cases dont il faut changer le statut. (3)



X = les cases dont il faut changer le statut

Cela nous permet de remarquer que pour le carré 5×5, la solution n'est pas unique. En effet, par symétrie, nous pouvons trouver une autre solution : la voici :

	A	B	C	D	E
1				X	X
2			X		
3		X			X
4	X				X
5	X		X	X	

ANNEXE : Solutions avec deux cases malades avec le carré 3x3 (4)

Solution avec un malade au centre :

A1 = A3 = C1 = C3 →

A2 = B1 = B3 = C2 →

Solution avec une combinaison de deux malades :

A1 + A2 = A3 + B3 = C2 + C3 = C1 + B1 = B3 + A3 = B1 + C1 = A2 + A1 = C3 + C2 = B1 + C1 →

A1 + B1 = A2 + A3 = C1 + C2 = C3 + B3 = B1 + A1 = B3 + C3 = A3 + A2 = C2 + C1 →

A1 + A3 = A1 + C1 = A3 + C3 = C1 + A1 = C3 + A3 = C1 + C3 →

A1 + B2 = A3 + B2 = C1 + B2 = C3 + B2 = B2 + C1 →

A1 + B3 = A3 + C2 = C1 + A2 = C3 + B1 = B3 + A1 →

A1 + C2 = C2 + A1 = C3 + A2 = C1 + B3 = A1 + A3 = B1 + C3 = B3 + C1 →

A1 + C3 = A3 + C1 = C1 + A3 = C3 + A1 →

A2 + B1 = B1 + A2 = B3 + A2 = B1 + C2 = B3 + C2 = B1 + C2 →

Notes d'édition

(1) Plus précisément, faire deux modifications consiste à ajouter 2 matrices à la matrice donnant l'état de départ, donc à faire une addition de 3 matrices; cette opération peut effectivement se faire dans n'importe quel ordre.
(2) La solution donnée est annoncée pour un malade en C3, elle fonctionne en fait pour un malade en A3.
(3) Il faut également changer le statut de la case C3.
(4) En fait, les solutions ne sont pas données : les égalités signifient que les situations de départ sont équivalentes par symétrie.
Si on veut trouver, par exemple, une solution pour les cases B1 et B2, on peut se rendre compte qu'il suffit d'appliquer à la suite les changements faits pour la case B1 toute seule et la case B2 toute seule. On laissera le lecteur vérifier que, après simplification, C2 B1 A2 A3 C3 conviendrait.