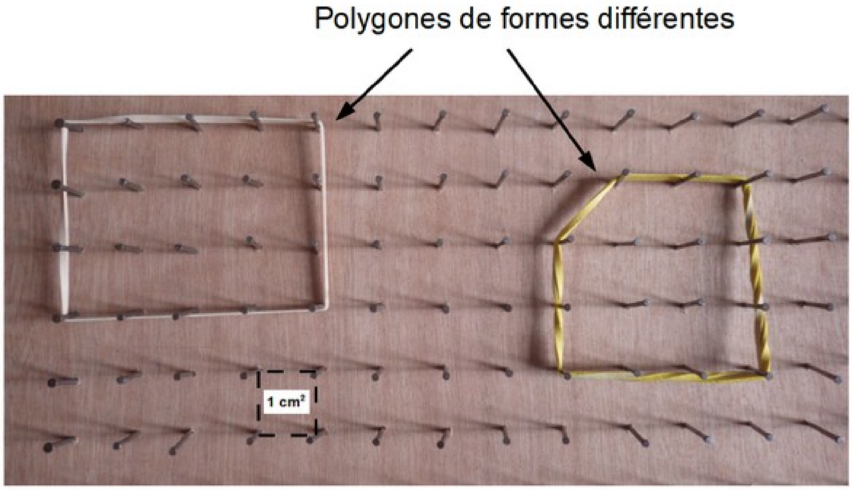
Aire de polygones dans un réseau de points

Année 2018-2019

Elèves :Amélie CHAVAROC, Yeva DOMBRIE, Antoine GUYOMARD, élèves de 4e.
Encadrés par Pascale BEASSE et Béatrice BOILLOT
Établissement : Collège Stella Maris, St Quay Portrieux (22)
Chercheur : Victor KLEPTSYN, Université de Rennes 1, CNRS.

I/ Présentation du sujet

On nous a donné une planche en bois sur laquelle des clous étaient plantés à 1cm les uns des autres.
On a ensuite formé sur cette planche, avec des élastiques, des polygones de formes et de tailles différentes.



Le problème posé par le chercheur Victor Kleptsyn était : **trouver l'aire d'un polygone en fonction de son nombre de points à l'intérieur et de son nombre de points au bord**.

- Les points à l'intérieur du polygone sont ceux qui ne touchent pas l'élastique mais qui sont à l'intérieur du polygone.
- Les points au bord sont ceux qui forment le polygone et qui touchent l'élastique.

II/ Annonce des conjectures et résultats obtenus :

- Nous avons trouvé une formule pour déterminer l'aire de polygones à partir du nombre de points au bord et du nombre de points à l'intérieur.
- Nous avons démontré cette formule pour les rectangles

III- Article

1/ Etablissement de la conjecture

Nous avons formé un grand nombre de polygones et avons, pour chacun d'entre eux, compté le nombre de points au bord, puis à l'intérieur et calculé l'aire.

Nous avons classé ces données dans un tableur. On a donc fait trois colonnes.

- La première colonne pour l'aire
- la deuxième pour le nombre de points au bord
- la troisième pour le nombre de points à l'intérieur.

	A	B	C
1	Aire	Nombre de points B	Nombre de points I
2	9,5	9	4
3	6	10	2
4	3	6	1
5	6,5	15	0
6	17	16	10
7	11	8	8
8	6	14	0
9	6	12	1
10	8	10	4
11	10	14	4
12	8	12	3
13	9	20	0
14	9	12	4
15	17,5	13	12
16	4	10	0
17	4,5	3	4
18	8,5	11	4
19	4,5	11	0
20	8	12	3
21	9	8	6
22	13	12	8
23	11	8	8
24	8	18	0
25	11	12	6
26	130	46	108

Nous avons cherché une relation entre le 1er nombre de chaque ligne (l'aire du polygone) et les autres nombres (nombre de points au bord et à l'intérieur).

On a commencé à regarder les polygones qui avaient 0 point à l'intérieur et on a remarqué que si on divisait le nombre de points au bord par deux et qu'on enlevait un,

on obtenait l'aire du polygone : $\frac{B}{2} - 1 =$ Aire pour $I = 0$

Une fois qu'on a trouvé la formule pour 0 point à l'intérieur, on a cherché pour un point à l'intérieur. On a trouvé que pour calculer l'aire d'un polygone avec un point à l'intérieur, on avait juste à diviser

le nombre de points au bord par deux. $\frac{B}{2} - 0 =$ Aire pour $I = 1$

On a ensuite trouvé que pour 2 points à l’intérieur on devait juste diviser le nombre de points au bord par deux et rajouter 1. $\frac{B}{2}$ +1 = Aire pour I = 2

Pour trois points à l’intérieur, l'aire se calcule ainsi : $\frac{B}{2}$ + 2 = Aire

Pour quatre points à l’intérieur, l'aire se calcule ainsi : $\frac{B}{2}$ + 3 = Aire

Pour dix points à l'intérieur, l'aire se calcule ainsi : $\frac{B}{2}$ + 9 = Aire

Et ainsi de suite...

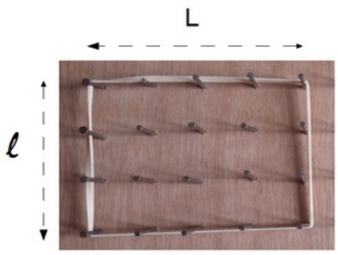
Finalement, à chaque fois il nous fallait prendre la moitié des points au bord et ajouter à ce nombre 1 de moins que le nombre de points à l’intérieur.

Donc notre formule pour calculer l’aire d’un polygone devient $\boxed{\frac{B}{2} + I - 1 = \text{Aire}}$

Ceci n’est qu’une conjecture.
Cela a l’air de fonctionner mais est-ce que cela fonctionne toujours ?
Nous avons entrepris de démontrer cette conjecture pour les rectangles.

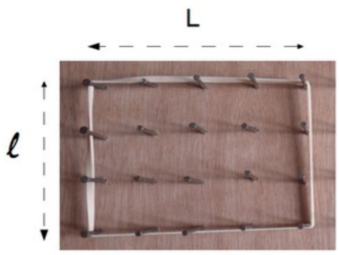
2/ Démonstration de la formule pour les rectangles

Expression de B en fonction de la longueur L et de la largeur ℓ du rectangle :



B = 2 x (L+ ℓ)
Dans le cas présent :
B = 2 x (4 + 3)
= 2 x 7
= 14

Expression de I en fonction de la longueur L et de la largeur ℓ du rectangle :



I = (L – 1) x (ℓ – 1)
Dans le cas présent :
I = (4 – 1) x (3 – 1)
= 3 x 2
= 6

On applique donc cela à la formule :

$$\frac{B}{2}+I-1 \quad \text{devient} \quad \frac{2\times(L+l)}{2}+(L-1)\times(l-1)-1$$

On commence à simplifier la formule :

$$\frac{2\times(L+l)}{2}+\boxed{(L-1)\times(l-1)}-1 \ =$$

On développe dans un tableau
la partie encadrée en rouge .

x	L	-1
ℓ	L x ℓ	- ℓ
-1	-L	+1

$$(L+l)+(L-1)\times(l-1)-1$$

$(L-1)\times(l-1)$ devient $L\times l-l-L+1$

On remplace donc l'encadré rouge par cette expression

$L+l+L\times l-l-L+1-1$

Et on continue à simplifier au maximum

$L+l+L\times l-l-L$ on a enlevé « 1-1 »

$l+L\times l-l$ on a enlevé « L- L »

$L\times l$ on a enlevé « $\ell-\ell$ »

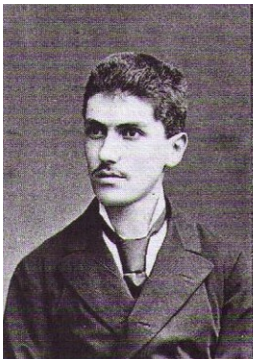
On trouve donc $L\times l$ qui est la formule de l'aire d'un rectangle.

Cela prouve que la formule fonctionne sur tous les rectangles.

IV/ Conclusion

Nous avons trouvé une formule pour trouver l'aire des polygones à partir des nombres de points au bord et à l'intérieur. Nous pensons qu'elle fonctionne pour tous types de polygones mais nous avons démontré la formule uniquement sur les rectangles.

Après avoir trouvé cette formule par nous-mêmes, nous avons appris qu'elle existait déjà : il s'agit de la **formule de Pick**.



Georg Alexander Pick est un mathématicien Autrichien
qui est né le 10 août 1859 et mort le 26 juillet 1942.
Il est mort dans un camp de concentration
et 20 ans plus tard, son compatriote, le mathématicien polonais Hugo Steinhaus redécouvre le théorème de Pick et le rend célèbre en le publiant dans son célèbre livre *Mathematical Snapshots.*