

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

# Allo, les pompiers ?

Année 2024-2025

Livia Bonnaud, Elise Lambin, Tissia Multon, Alexandre Gavaza, Azhar Gana  
niveau de la 3e à la 1ère

Établissement(s) : Lycée Français Vincent van Gogh, La Haye, Pays-Bas

Enseignant-e(s) : Florence Decool, Stéphane Béringue

Chercheur-Chercheuse(s) : Pierre Albert, université d'Utrecht aux Pays-Bas

## Table des matières

<b>1 Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2 Approche géométrique</b>	<b>3</b>
2.1 Les cercles concentriques . . . . .	3
2.2 Application . . . . .	6
2.2.1 Situation 1 . . . . .	6
2.2.2 Situation 2 . . . . .	7
2.3 Synthèse . . . . .	7
<b>3 Concrétisation : comment initier le feu ?</b>	<b>8</b>
3.1 C'est quoi le feu? . . . . .	8
3.1.1 Une réaction chimique . . . . .	8
3.2 Simuler un feu . . . . .	9
3.2.1 Choix des réactifs . . . . .	9
3.2.2 Théorie des collisions . . . . .	9
3.3 Résultats . . . . .	10
3.3.1 Déterminer $E_a$ . . . . .	10

3.3.2	Cantera . . . . .	11
3.3.3	Régression linéaire . . . . .	12
3.3.4	Synthèse . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Modélisation de la propagation grâce à des équations différentielles</b>	<b>13</b>
4.1	Modélisation d'un arbre en feu . . . . .	13
4.1.1	La masse . . . . .	13
4.1.2	La température . . . . .	14
4.1.3	Portrait de phase . . . . .	14
4.2	Ajout d'un transfert . . . . .	15
4.2.1	L'équation de la chaleur . . . . .	15
4.2.2	Les champs $m$ et $TT..$ . . . .	16
4.2.3	...sous un vent d'été . . . . .	17
4.3	Simulation d'un incendie . . . . .	18
4.3.1	La méthode d'Euler . . . . .	18
4.3.2	L'algorithme . . . . .	19
4.3.3	Optimisation analytique . . . . .	19
4.4	Résultats et discussion . . . . .	20
4.4.1	Python et animations . . . . .	20
4.4.2	Suite de la recherche . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>21</b>
	<b>Notes d'édition</b>	<b>21</b>

## Table des matières

### 1. Introduction

Les récents incendies survenus dans la Loire, en particulier ceux du 9 août 2024 à Noirétable, où cinq feux de végétation ont éclaté simultanément le long de la départementale 101, ainsi que les deux incendies majeurs gérés par les pompiers du Gard le lendemain, mettent en lumière un défi majeur dans la modélisation des feux de forêt : comment prédire et gérer efficacement les lignes de front lorsque plusieurs départs de feu se produisent simultanément?



FIGURE 1 – Incendies gardois (France Bleu)

Nous proposons d'abord une méthode pragmatique pour visualiser et prédire la propagation des lignes de front, puis, dans un second temps, nous analyserons les mécanismes qui régissent la combustion. Enfin, nous terminerons par des simulations reposant sur des équations différentielles.

## 2. Approche géométrique

Dans cette première partie, nous introduisons une modélisation des lignes de front par des cercles et ellipses concentriques.

### 2.1. Les cercles concentriques

Définition : Deux cercles sont dits concentriques lorsqu'ils partagent le même centre, mais ont des rayons différents.

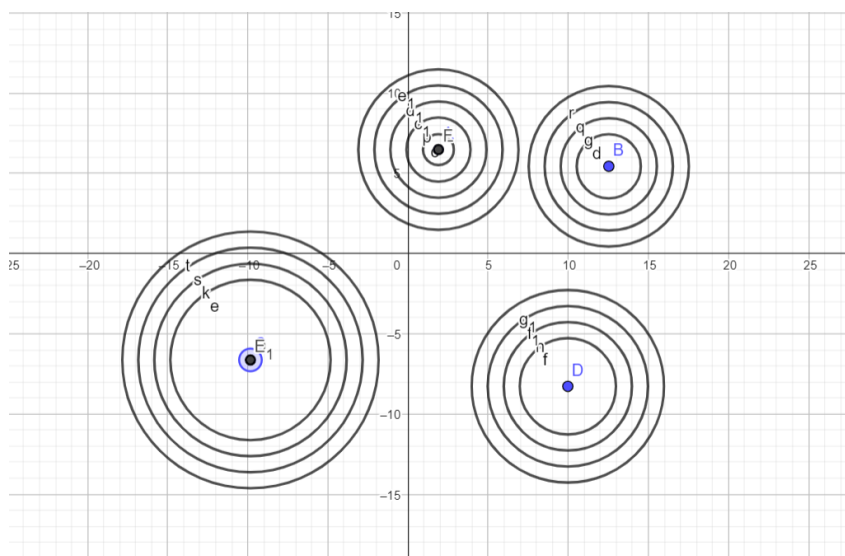


FIGURE 2 – Cercles concentriques sur Geogebra

Nous avons choisi cette représentation pour plusieurs raisons :

- Pour faciliter la visualisation : Les cercles concentriques évoquent une cible, où chaque anneau représente un cercle ayant le même centre.
- Pour simplifier nos calculs : Lorsqu'on travaille avec des cercles concentriques, il est plus facile de comparer les distances entre leurs centres et de calculer des propriétés géométriques.
- Pour ranger les données plus facilement : Les cercles concentriques sont utilisés dans de nombreux domaines, comme les cartes topographiques, pour organiser et classer les données de manière claire et ordonnée.
- Pour imiter la façon dont travaillent les pompiers : Les pompiers utilisent la notion de zones concentriques pour délimiter les périmètres de sécurité autour d'un incendie ou d'une situation d'urgence, en fonction de la distance au centre de l'incendie.
- Pour trouver une formule : En géométrie, les propriétés des cercles concentriques peuvent être exprimées à l'aide de formules où  $r_1$  et  $r_2$  sont les rayons de deux cercles concentriques.

$$r_2 = r_1 + v \times t$$

Décodage des termes de la formule :

- ( $r_1$ ) Rayon initial : C'est le rayon initial .
- ( $v$ ) Vitesse : La vitesse de propagation du feu.
- ( $t$ ) Temps : Le temps écoulé depuis que le feu a commencé à se propager.
- ( $r_2$ ) Rayon final : Le rayon du feu après avoir pris en compte la vitesse et le temps.

La formule est utilisée pour calculer l'agrandissement du feu.

Dans cette formule,  $r_1$  est la position initiale du phénomène : c'est le départ du feu(1). La multiplication de la vitesse par le temps donne la distance parcourue en fonction du temps écoulé. Enfin,  $r_2$  est la position finale du phénomène après avoir parcouru cette distance supplémentaire à partir de  $r_1$ .

Voici des illustrations que nous avons créées grâce à cette formule :

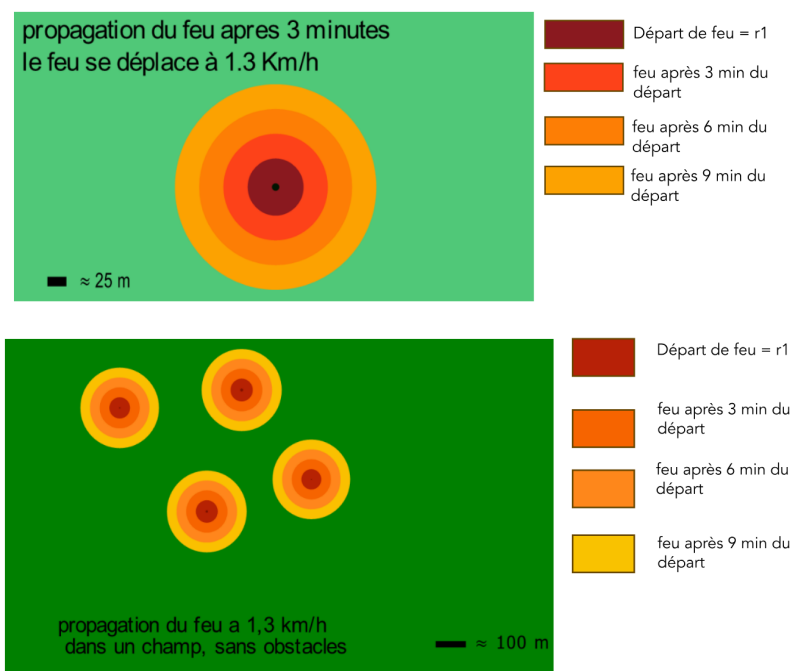


FIGURE 3 – Propagation des cercles

Nous avons également appliqué notre formule sur une ellipse, car la présence du vent peut déformer le feu circulaire(2).

$$A_{\text{ellipse1}} = a \times b \times \pi$$

$$A_{\text{ellipse2}} = (a + b) \times k \times \pi$$

$$A_{\text{ellipse3}} = (a' + b') \times k \times \pi$$

On a donc :

- $A_{\text{ellipse1}}$ , l'aire d'une ellipse, où  $a$  et  $b$  sont les longueurs des demi-axes.
- $A_{\text{ellipse2}}$ , l'aire de l'image de l'ellipse 1 par une homothétie de rapport  $k$ .
- $A_{\text{ellipse3}}$ , l'aire de l'image de l'ellipse 2 par une nouvelle homothétie de rapport  $k$ , avec  $a'$  et  $b'$  les nouvelles dimensions.

De plus, grâce à cette formule, nous avons créé un programme Scratch .

Le programme nous demande d'entrer le rayon initial, la vitesse de propagation du feu et le temps de propagation. Une fois ces données saisies, le programme effectue les calculs et agrandit le feu. Bien que le feu soit représenté par un dessin dans le programme, on suppose qu'il a la forme d'un cercle pour simplifier les calculs.

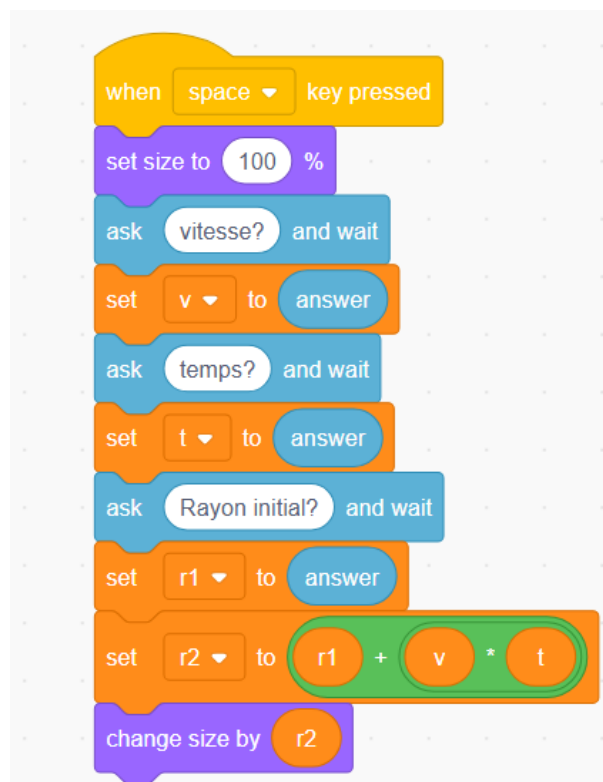


FIGURE 4 – Le programme Scratch qui illustre la formule

Lien vers le programme : <https://scratch.mit.edu/projects/1111439581>

## 2.2. Application

À partir des deux faits divers, nous avons formulé des questions et imaginé plusieurs scénarios auxquels nous avons cherché des réponses.

### 2.2.1 Situation 1

On part du principe que les deux feux de Terre-Neuve (TN) et de Chaudesoleil (CD) commencent à se propager en même temps, mais avec une heure de décalage entre eux. Le feu de TN démarre à 12h00 à une vitesse de propagation de 1,5 km/h, tandis que celui de CD commence à 13h00 avec une vitesse de propagation de 0,5 km/h. Les deux feux sont à une distance de 4,7 km l'un de l'autre<sup>(3)</sup>.

Pour calculer à quel moment les feux se rencontreront, on utilise les formules suivantes :

$$D_{TN} = 1,5 \times t$$

$$D_{CD} = 0,5 \times (t - 1)$$

Les deux distances additionnées doivent donner la distance totale de 4,7 km entre les deux feux. Cela donne l'équation du premier degré suivante :

$$1,5t + 0,5(t - 1) = 4,7$$

En développant et résolvant :

$$1,5t + 0,5t - 0,5 = 4,7$$

$$2t = 5,2$$

$$t = 2,6 \text{ heures}$$

On trouve que les deux feux se rencontrent donc 2,6 heures après le départ du feu de TN, soit à 14h36.

À ce moment-là :

- Le feu de TN aura parcouru 3,9 km ( $1,5 \times 2,6$ ).
- Le feu de CD aura parcouru 0,8 km ( $0,5 \times 1,6$ ).



FIGURE 5 – Schématisation des résultats trouvés

### 2.2.2 Situation 2

Nous proposons une deuxième mise en situation inspirée des cinq feux de Noirétable.

En premier, pour faciliter la compréhension, nous avons renommé les 5 feux par : F1, F2, F3, F4 et F5.

Puis pour pouvoir répondre à notre question sans tenir compte des conditions environnementales,

nous admettons que tous les feux ont la même taille et se déplacent tous à une vitesse de 2,5 km/h.

Ils sont répartis en ligne droite, sur 2 km, espacés de distances égales.

Les conditions sont les suivantes :

- Tous les feux commencent à 13h avec un rayon de 3,5 m
- Ils se déplacent tous à une vitesse constante et toujours sous la forme d'un cercle

Nous nous sommes posé la question suivante : À quelle heure les feux se rejoindront-ils ?

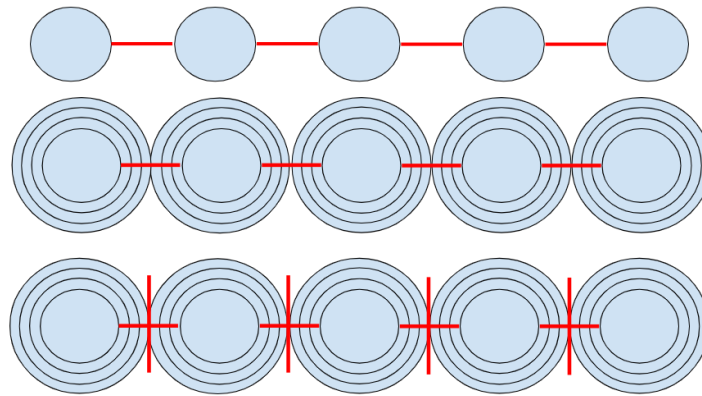


FIGURE 6 – Schéma de la disposition des feux et de leur évolution

Calcul : Pour trouver l'heure où les feux se rejoindront, il faut trouver où ils se rencontreront.

Pour cela, on calcule :

- La distance qui sépare deux feux :

$$2000 - 5 \times (2 \times 3,5) = 500 \text{ m}$$

- La distance que doit parcourir un feu :

$$\frac{500}{2} = 250 \text{ m} = 0,25 \text{ km}$$

- Le temps nécessaire :

$$\frac{0,25}{2,5} = 0,1 \text{ h} = 6 \text{ minutes}$$

Les feux prendront donc 6 minutes à se rejoindre!**(4)**

### 2.3. Synthèse

On peut maintenant conclure de cette partie que :

- On peut modéliser les feux avec des cercles et des ellipses, ce qui permet de les visualiser plus simplement.
- Grâce à cette modélisation, on peut calculer l'agrandissement d'un feu avec la formule :

$$r_2 = r_1 + v \times t.$$

### 3. Concrétisation : comment initier le feu ?

L'approche géométrique permet une représentation simple et rapide des lignes de front, ce qui est avantageux sur le terrain, où l'apport de résultats peu précis mais rapides est primordial. Dans cette section, nous nous intéresserons à une analyse des mécanismes chimiques influençant la synthèse du feu. Nous nous posons ici la question suivante : comment initier le feu ?

#### 3.1. C'est quoi le feu ?

Lorsqu'on revient au problème de base, on est naturellement enclin à se poser la question : qu'est-ce que le feu ? Cette deuxième phase de notre recherche vise à y répondre à l'aide d'outils algébriques.

##### 3.1.1 Une réaction chimique

La réponse la plus simple est que le feu est une réaction chimique. En effet, il y a 400 000 ans, l'Homo erectus découvrit un moyen de produire le feu. Il découvrit qu'en frottant un bâton relativement dur contre un autre plus mou, ou en frappant deux silex entre eux, il pouvait, au bout d'un certain temps, obtenir une flamme(5).

Dans l'exemple de synthèse du feu de nos ancêtres, on observe la présence d'un combustible (le bois) et d'un comburant (le dioxygène de l'air). Il s'agit ici d'une réaction chimique élémentaire, car elle se fait en une seule étape : l'apport d'énergie sur le comburant et le combustible synthétise les produits de la réaction. Dans le cas d'une combustion complète, les produits sont le dioxyde de carbone et l'eau.

Cependant, comme le montre l'expérience de l'Homo erectus, obtenir du feu n'est pas chose facile : il fallait parfois plus de sept heures pour obtenir une flamme.

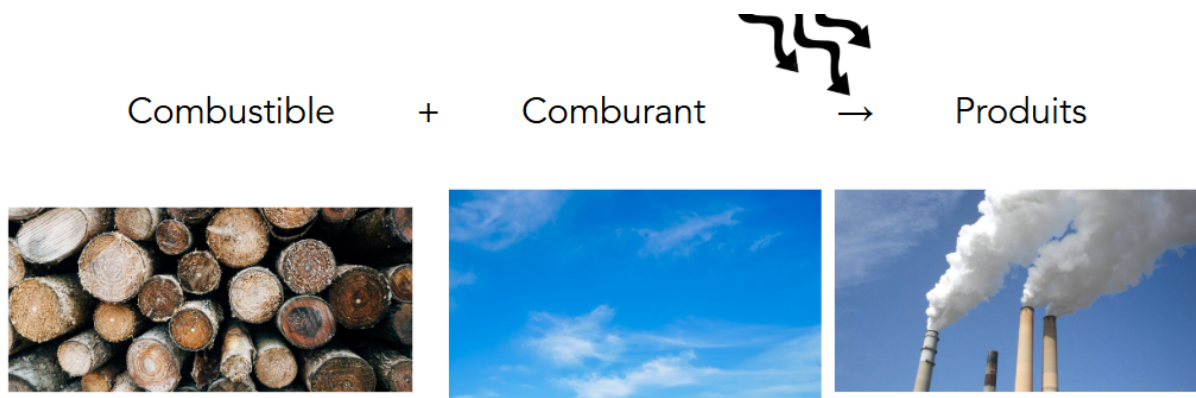


FIGURE 7 – L'équation de la combustion

Cette durée s'explique par les différents facteurs intervenant dans la réaction. Nous nous intéressons d'abord à l'énergie requise pour initier le feu, représentée dans le schéma par les flèches noires.

Pour cela, nous allons simuler un feu.

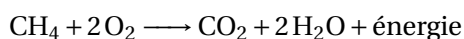
## 3.2. Simuler un feu

La simulation d'un feu repose sur une démarche progressive, commençant par la sélection précise des réactifs, suivie de l'application de la théorie cinétique des collisions.

### 3.2.1 Choix des réactifs

Dans le cadre de l'étude de la combustion, la cellulose aurait pu être choisie comme réactif. Ce polymère naturel, principal constituant du bois, est couramment impliqué dans les phénomènes de combustion (ex. : incendies de forêts). Cependant, sa structure chimique complexe  $(C_6H_{10}O_5)_n$  et la multiplicité des produits issus de sa dégradation thermique (monoxyde de carbone, particules de carbone, composés organiques volatils) rendent l'analyse cinétique et énergétique difficile.

À l'inverse, le méthane ( $CH_4$ ), plus simple d'un point de vue moléculaire, constitue un excellent modèle pour étudier les mécanismes fondamentaux de la combustion. Sa réaction avec le dioxygène ( $O_2$ ) est bien connue, se produit en une seule étape principale, et génère uniquement du dioxyde de carbone ( $CO_2$ ) et de l'eau ( $H_2O$ ) :



Cette combustion claire facilite l'analyse des notions de cinétique (énergie d'activation), fréquence des collisions et de thermodynamique, libération d'énergie.

Le dioxygène est le comburant naturel de l'atmosphère, présent à hauteur de 21 %, et joue un rôle essentiel dans les réactions d'oxydation. Son comportement est parfaitement décrit par la théorie des gaz parfaits.

Ainsi, le couple méthane/dioxygène constitue un système de référence, bien plus adapté à une étude théorique rigoureuse que la cellulose, tout en restant représentatif des grands principes de la combustion.

### 3.2.2 Théorie des collisions

Pour mieux appréhender l'importance de l'énergie dans une réaction chimique, il convient de revenir brièvement sur ses fondements théoriques. Supposons, à titre d'hypothèse, que l'initiation de la combustion du méthane ne nécessite aucune énergie. Dans ce cas, chaque collision entre une molécule de méthane ( $CH_4$ ) et une molécule de dioxygène ( $O_2$ ) entraînerait systématiquement une réaction exothermique.

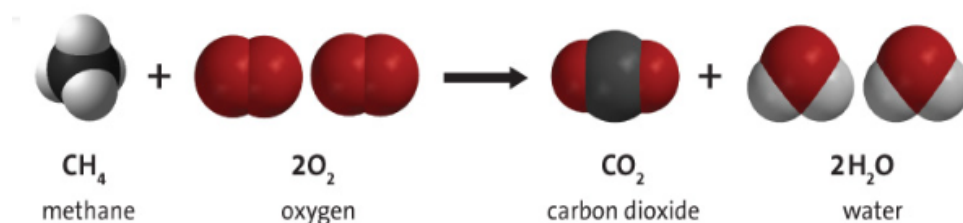


FIGURE 8 – Lorsque la combustion conduit aux produits

Cependant, la réalité est bien différente. Si une telle hypothèse se vérifiait, notre atmosphère serait en perpétuelle combustion, ce qui est manifestement incompatible avec l'observation. Selon la théorie des collisions, une réaction ne survient que si certaines conditions sont réunies : température suffisante, orientation adéquate des molécules, et surtout un seuil d'énergie appelée *énergie d'activation*.

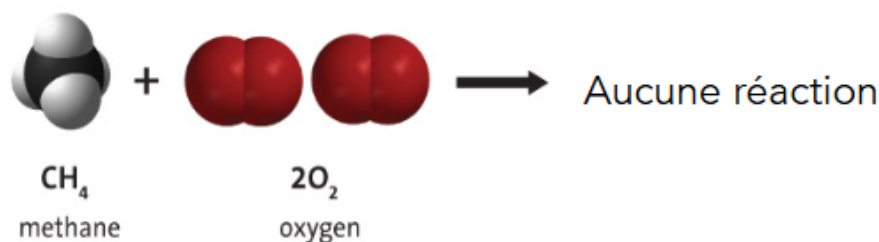


FIGURE 9 – Lorsque la combustion n'aboutit pas à une réaction

Une analogie courante est celle des montagnes russes : il faut fournir un effort pour atteindre le sommet (état de transition), mais une fois ce seuil franchi, la descente s'effectue rapidement avec libération d'énergie. De même, une fois atteinte l'énergie d'activation, la formation des produits libère de l'énergie.

La température joue un rôle essentiel : une température plus élevée augmente l'énergie cinétique moyenne des particules, et donc la probabilité de collisions efficaces.

### 3.3. Résultats

Après avoir présenté les bases théoriques de la cinétique chimique, nous allons maintenant analyser les résultats obtenus. En particulier, l'un des paramètres clés du modèle, l'énergie d'activation, peut être estimé à partir de données expérimentales.

#### 3.3.1 Déterminer $E_a$

L'énergie d'activation  $E_a$  représente l'énergie minimale que les molécules doivent posséder pour qu'une réaction chimique ait lieu. À température ambiante, toutes les molécules ne disposent pas de cette énergie. La proportion de molécules capables de franchir cette barrière énergétique est donnée par une relation exponentielle appelée taux d'énergie :

$$f(E \geq E_a) = \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$

Ce taux exprime la fraction des molécules qui, à une température  $T$ , possèdent une énergie supérieure ou égale à  $E_a$ , et donc susceptibles d'engendrer une réaction. Il s'agit d'un facteur déterminant dans la vitesse de réaction, car seule cette minorité de molécules peut initier la transformation chimique(6).

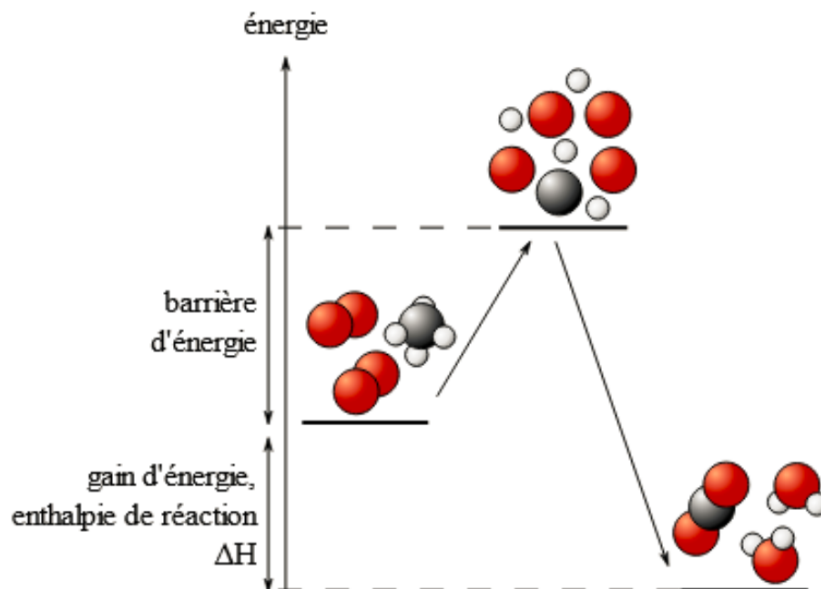


FIGURE 10 – Schéma de la barrière d'énergie pour une réaction chimique élémentaire.

Pour déterminer empiriquement  $E_a$ , on peut mesurer la constante de vitesse  $k(T)$  à différentes températures. En traçant ensuite  $\ln(k)$  en fonction de  $1/T$ , on obtient une droite dont la pente est reliée à  $E_a$  par la forme linéaire de la loi d'Arrhenius :

$$\ln(k) = \ln(A) - \frac{E_a}{RT}$$

Le graphique de la Figure 11, appelé « diagramme d'Arrhenius », permet alors d'estimer  $E_a$  via une régression linéaire. En pratique, une méthode consiste à initier la combustion du méthane dans un système clos, à différentes températures contrôlées, puis à mesurer la concentration des produits de la réaction ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ) au cours du temps.

Cependant, bien que conceptuellement idéale, cette méthode expérimentale peut s'avérer complexe, voire irréalisable, dans un cadre pédagogique comme l'école en raison des contraintes de sécurité et de précision requises.

### 3.3.2 Cantera

En raison des risques liés à la manipulation de gaz inflammables, il est souvent difficile de mener ces expériences en conditions réelles. C'est pourquoi nous avons opté pour une modélisation numérique avec Cantera, une bibliothèque spécialisée dans la simulation des réactions chimiques et de combustion.

Cantera permet de simuler fidèlement le comportement des mélanges gazeux, en intégrant les lois de la thermodynamique, de la cinétique chimique et du transfert thermique.

Grâce aux données simulées, on peut calculer  $k(T)$  pour différentes températures, et construire le diagramme d'Arrhenius correspondant.

### 3.3.3 Régression linéaire

Le graphique ci-dessous illustre la représentation classique d'Arrhenius, avec  $1/T$  en abscisse (en  $K^{-1}$ ) et  $\ln(k)$  en ordonnée.

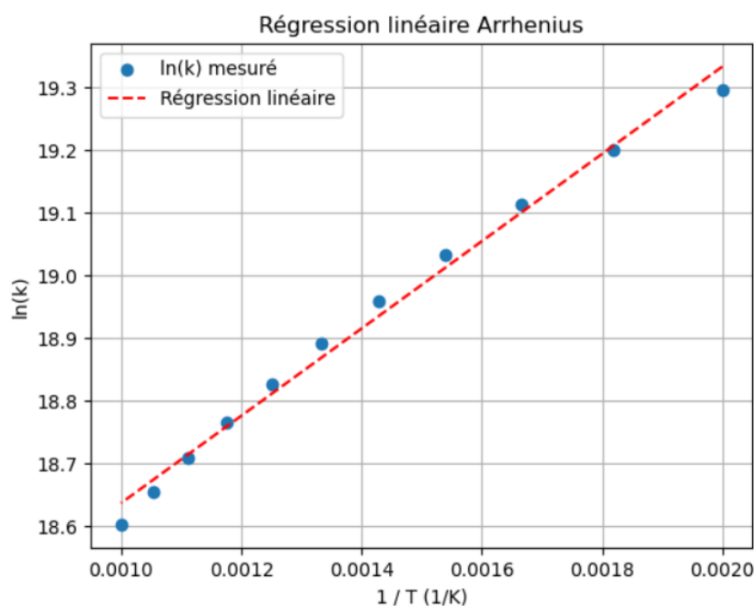


FIGURE 11 – Régression linéaire de la loi d'Arrhenius

La droite rouge correspond à la régression linéaire selon :

$$\ln(k) = \ln(A) - \frac{E_a}{R} \cdot \frac{1}{T}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} E_a = 5784,97 \text{ kJ/mol} \\ A = 6,192 \times 10^7 \text{ s}^{-1} \\ R^2 = 0,9905 \end{cases}$$

La valeur élevée de  $R^2$  montre un très bon ajustement du modèle aux données simulées.

### 3.3.4 Synthèse

Pour initier une combustion, il est essentiel de franchir une barrière énergétique, modélisée par l'énergie d'activation  $E_a$ . La régression entre  $\ln(k)$  et  $1/T$  donne  $E_a \approx 5784,97 \text{ kJ/mol}$  et  $A \approx 6,192 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ , validant la loi d'Arrhenius.

Des objets quotidiens comme les allumettes, les briquets ou les loupes focalisant la lumière solaire permettent de fournir localement cette énergie critique. Sans ce seuil franchi, les collisions moléculaires restent insuffisantes pour déclencher la réaction.

Toutefois, utiliser le méthane comme combustible simplifie la modélisation mais réduit la justesse de la représentation. Pour prédire la propagation d'un feu de forêt, il faut intégrer la combustion de la cellulose dans un modèle à l'image de celui obtenu ci-dessus. Ainsi, cette étude, bien que mathématique, reste incomplète pour représenter pleinement les phénomènes réels visés.

## 4. Modélisation de la propagation grâce à des équations différentielles

Dans cette dernière section, nous modéliserons la propagation d'un feu de forêt en considérant deux champs scalaires  $m$  et  $T$ , qui associent à chaque point  $(x, y)$  du plan et à chaque instant  $t$  une densité de biomasse combustible et une température, respectivement. L'image du triplet  $(x, y, t)$  par un champ scalaire ou vectoriel  $F$  se note  $F(x, y, t)$ .

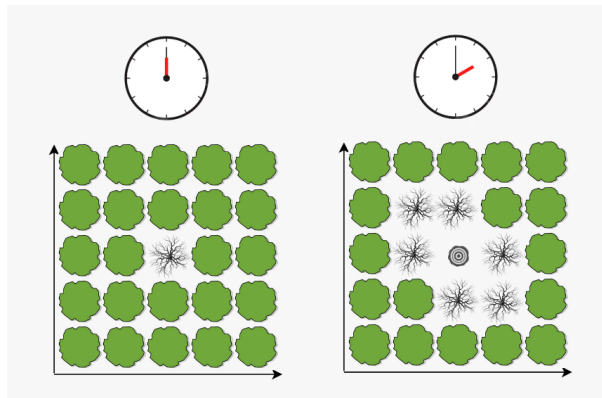


FIGURE 12 – Le champ scalaire  $m$

Nous nous contentons tout d'abord de modéliser la combustion d'un seul arbre (ou plutôt d'une brindille d'herbe), ce qui revient à modéliser le cas où  $m$  est nul sauf en un point.

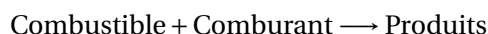
*Remarque.* Nous utilisons la notation  $\frac{df}{dx}$  pour désigner la fonction dérivée  $f'$ .

### 4.1. Modélisation d'un arbre en feu

Soient  $m$  et  $T$  deux fonctions qui associent à un instant  $t$  la masse combustible d'un arbre en feu et la température moyenne de l'air autour. Elles ont respectivement pour unités la masse (kg) et la température (K).

#### 4.1.1 La masse

La combustion de cet arbre, comme toute réaction chimique, peut être modélisée grâce à une équation différentielle. Considérons une équation bilan simplifiée d'une combustion :



Il existe une multitude d'équations gouvernant une telle réaction chimique, mais nous prenons la plus simple : celle qui est linéaire et du premier ordre, lorsque la quantité de comburant reste constante (par exemple, dans une atmosphère ouverte). Selon cette dernière, la vitesse à laquelle la quantité de réactifs diminue est proportionnelle à cette même quantité. La masse  $m$  de combustible étant proportionnelle à sa quantité de matière, nous pouvons donc écrire :

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

Le coefficient de proportionnalité  $k$  peut dépendre de la température, auquel cas il obéit à l'équation d'Arrhenius  $k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$ , où  $E_a$  est l'énergie d'activation de la réaction ( $\text{J mol}^{-1}$ ),  $R$  est la constante des gaz parfaits ( $\text{JK}^{-1} \text{mol}^{-1}$ ) et le nombre  $A$  est nommé coefficient pré-exponentiel d'Arrhenius ( $\text{s}^{-1}$ ). Ainsi, la masse évolue selon l'équation suivante :

$$\frac{dm}{dt} = -Am \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad (4.1)$$

### 4.1.2 La température

Nous visons maintenant à décrire l'évolution de la température du système en fonction du temps. La chaleur libérée lors de la combustion contribue à l'augmentation de la température du système. On peut donc décrire, grâce à la capacité thermique de l'air autour de l'arbre et à  $E_m$  l'énergie massique du combustible ( $\text{Jkg}^{-1}$ ), qu'une perte de masse se traduit par un gain en température :

$$\frac{dT}{dt} = -\beta_0 \frac{dm}{dt} \quad \beta_0 = \frac{E_m}{c_e \rho_e V}$$

La capacité thermique de l'air autour de l'arbre est déduite en utilisant la capacité thermique massique  $c_e$  ( $\text{JK}^{-1} \text{kg}^{-1}$ ), la masse volumique  $\rho_e$  ( $\text{kgm}^{-3}$ ) et le volume  $V$  de l'air en contact proche ( $\text{m}^3$ ).

Ce modèle ne permet pas au système de se refroidir; nous devons alors ajouter un terme pour dissiper la chaleur. Selon la loi de refroidissement de Newton, la vitesse à laquelle un corps dissipe sa chaleur est proportionnelle à la différence de température entre celui-ci et son environnement. Ainsi, en considérant un coefficient  $h$  de transfert de chaleur ( $\text{WK}^{-1} \text{m}^{-2}$ ), une épaisseur  $l$  d'air (m) à travers laquelle la chaleur est dissipée (Fig. 15), et en prenant  $T_e$  la température (K) de l'air ambiant, on peut écrire :

$$\frac{dT}{dt} = -\beta_0 \frac{dm}{dt} - \gamma(T - T_e) \quad \gamma = \frac{h}{c_e \rho_e l} \quad (4.2)$$

En quelque sorte, le dénominateur  $c_e \rho_e l$  désigne la capacité thermique d'une surface dissipatrice.

### 4.1.3 Portrait de phase

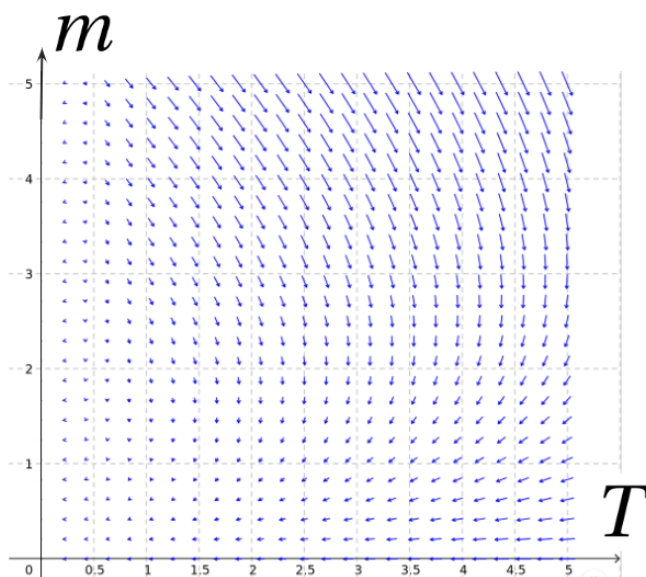


FIGURE 13 – Allure du portrait de phase ( $T'$ ,  $m'$ )

Afin d'illustrer ce premier modèle, nous présentons un exemple de "portrait de phase" du système d'équations différentielles 4.1 et 4.2 dans la Figure 13. Ici, chaque point du plan de coordonnées ( $T$ ,  $m$ ) représente un *état* du système; en d'autres termes, ce plan représente tous les états de températures et de masses dans lesquels l'arbre peut se trouver. Le vecteur associé à chacun de ces points indique à quelles vitesses et dans quelles directions ces grandeurs évoluent pour l'état donné.

Ainsi, nous pouvons vérifier la cohérence physique de ce modèle. En effet, on voit que la température a tendance à augmenter puis à diminuer en fonction de la masse, qui converge correctement vers zéro.

## 4.2. Ajout d'un transfert

Nous promouvons maintenant les fonctions  $m$  et  $T$  au rang de champs scalaires dépendant du temps, avec  $x, y$  en mètres et  $t$  en secondes. La grandeur  $T$  reste une température (K), mais  $m$  devient une masse surfacique ( $\text{kgm}^{-2}$ ), c'est-à-dire une masse par unité de surface.

En effet, la distribution  $T$  décrit la température en un point donné, tandis qu'on devrait obtenir une masse lorsqu'on intègre  $m$  sur une surface.

### 4.2.1 L'équation de la chaleur

Nous nous inspirons de l'équation de la chaleur et utilisons la notion de convexité pour introduire une propagation.

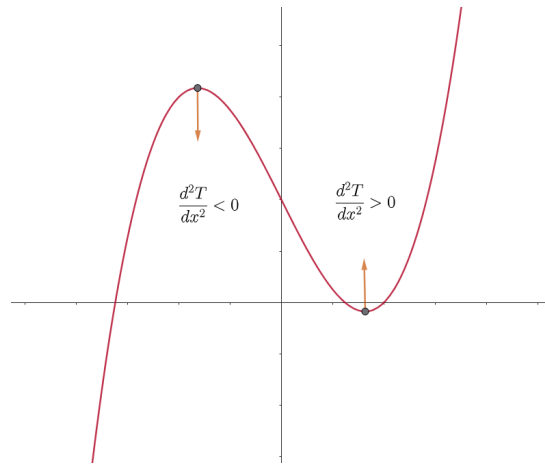


FIGURE 14 – La convexité donnée par la dérivée seconde

Intuitivement, afin d'atteindre un équilibre entre points chauds et froids, la courbe décrivant la température devrait s'aplatir lorsque la chaleur se diffuse. Ainsi, à un instant  $t$ , lorsque la fonction  $T$  est convexe en un point (c'est-à-dire autour d'un minimum), la température devrait augmenter, et lorsqu'elle est concave (c'est-à-dire autour d'un maximum), elle devrait diminuer.

La notion de convexité se traduit mathématiquement par la dérivée seconde  $\frac{d^2f}{dx^2}$ . Lorsque celle-ci est positive en un point, la fonction est convexe, et concave si elle est négative. En une dimension spatiale, l'équation de la chaleur dit simplement que la vitesse à laquelle la température évolue en un point est proportionnelle à la dérivée seconde, soit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Le "d rond"  $\partial$  désigne la dérivée partielle, qui sert à nuancer la notion de dérivée lorsqu'on travaille dans plus d'une dimension. On dérive "le long" d'une coordonnée, spatiale ou temporelle, en fixant toutes les autres.

En deux dimensions spatiales ou plus, la dérivée seconde est remplacée par l'opérateur de Laplace, noté  $\nabla^2$ . La "laplacienne" d'un champ scalaire  $f$  est simplement la somme de ses dérivées secondes partielles le long des coordonnées cartésiennes.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ainsi, l'équation de la chaleur en deux dimensions est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (4.3)$$

où le coefficient  $\alpha$  est appelé la "diffusivité thermique" du milieu ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ).

#### 4.2.2 Les champs $m$ et $TT$ .

L'équation gouvernant le champ  $m$  est identique à l'équation 4.1, à la nuance près de la dérivée partielle.

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -Am \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad (4.4)$$

Pour la température, l'idée est de combiner l'équation 4.2 décrivant l'évolution de la température d'un seul arbre à l'équation 4.3 de la propagation de la chaleur. Cependant, puisque notre variable  $m$  désigne une masse *surfactive* et non plus une masse ordinaire, il faut remplacer le coefficient  $\beta_0$  pour satisfaire les unités.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T - \beta \frac{\partial m}{\partial t} - \gamma(T - T_e) \quad \beta = \frac{E_m}{c_e \rho_e L} \quad (4.5)$$

Nous avons donc remplacé le volume  $V$  de l'air en contact avec un seul arbre par la hauteur moyenne  $L$  des arbres. Le dénominateur désigne une capacité thermique *surfactive* et non plus une capacité thermique ordinaire.

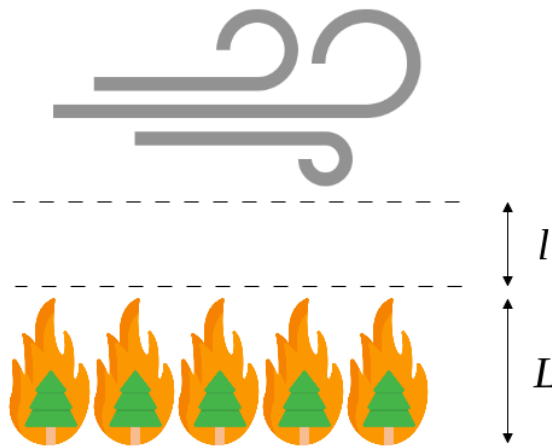


FIGURE 15 – Les longueurs  $L$  et  $l$

Nous attirons l'attention du lecteur sur notre utilisation de l'équation de la chaleur. Traditionnellement, l'équation de la chaleur décrit les transferts de chaleur *conductifs*, c'est-à-dire de proche en proche.

Cependant, la propagation du feu par l'intermédiaire de ses flammes est un cas de transfert *convectif*. Ce dernier est normalement modélisé grâce à la mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes), donnant lieu à des phénomènes émergents, mais toutefois bien plus complexes à modéliser. Ainsi, l'équation de la chaleur ne sert que d'une (assez bonne) approximation de la propagation convective. En outre, la diffusivité thermique  $\alpha$  n'est pas celle de l'air comme on pourrait s'y attendre, mais une grandeur effective qui sera déterminée par la mesure.

### 4.2.3 ...sous un vent d'été

Enfin, nous pouvons introduire un champ vectoriel  $\vec{u}$  pour modéliser l'effet du vent ( $\text{m s}^{-1}$ ), c'est-à-dire que  $\vec{u}$  associe à chaque triplet  $(x, y, t)$  un vecteur. Pour l'introduire dans notre modèle, nous cherchons une expression qui traduit à quel point l'augmentation de la température est alignée avec le vent.

Le gradient d'un champ scalaire  $f$ , noté  $\nabla f$ , est le champ vectoriel dont les coordonnées sont les dérivées partielles du champ  $f$  le long des coordonnées cartésiennes respectives.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ce vecteur donne la direction dans laquelle  $f$  croît le plus rapidement, avec cette augmentation donnée par la norme du gradient. Le degré d'alignement de celui-ci avec un autre vecteur  $\vec{v}$  est donné par le produit scalaire  $\vec{v} \cdot \nabla f$ .

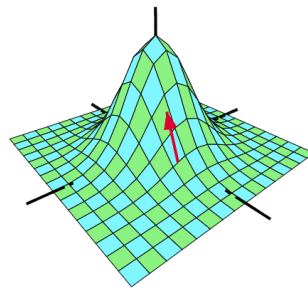


FIGURE 16 – Le gradient d'un champ scalaire en un point donné (Khan Academy)

L'expression  $\vec{u} \cdot \nabla T$  donne alors un nombre désignant à quel point le vent "pousse" la température à augmenter, selon s'ils sont alignés ou non. Nous ajoutons ce terme à l'équation 4.5 pour donner notre équation finale, formant un système avec l'équation 4.4.

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = -Am \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T - \beta \frac{\partial m}{\partial t} - \gamma(T - T_e) \end{cases} \quad (4.6)$$

Nous résumons toutes les grandeurs physiques utilisée dans le Tableau 1.

Grandeur physique	Nom	Unité (SI)
Masse surfacique	$m$	$\text{kg m}^{-2}$
Température	$T$	K
Vent	$\vec{u}$	$\text{m s}^{-1}$
Constante d'Arrhenius	$A$	$\text{s}^{-1}$
Hauteur des arbres	$L$	m
Épaisseur de transfert	$l$	m
Diffusivité thermique	$\alpha$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
Coefficient de transfert de chaleur	$h$	$\text{W K}^{-1} \text{m}^{-2}$
Énergie massique de la biomasse	$E_m$	$\text{J kg}^{-1}$
Température ambiante de l'air	$T_e$	K
Masse volumique de l'air	$\rho_e$	$\text{kg m}^{-3}$
Capacité thermique massique de l'air	$c_e$	$\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$

TABLE 1 – Liste des grandeurs physiques

### 4.3. Simulation d'un incendie

Nous admettons que le système 4.6 n'a pas de solution analytique non triviale. Nous cherchons donc à résoudre ce problème numériquement.

#### 4.3.1 La méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet de résoudre numériquement des équations différentielles, telles que celles présentées ci-dessus. Elle consiste à approximer une fonction grâce à sa dérivée. Intuitivement, il s'agit de suivre des droites parallèles aux tangentes de la fonction en petits pas, pour créer une ligne brisée qui suit plus ou moins la solution analytique.

Formellement, pour une fonction  $f$  avec une dérivée  $\frac{df}{dx}$ , connue ou calculable à partir de  $f$ , la méthode d'Euler propose une approximation de  $f$  en utilisant le fait que, lorsque la variation  $\delta x$  tend vers zéro, l'égalité suivante tient :

$$f(x + \delta x) = f(x) + \delta x \frac{df}{dx}(x)$$

Ainsi, si une valeur initiale  $f(x_0)$  nous est donnée, nous pouvons calculer les valeurs subséquentes de la fonction en calculant récursivement  $f(x_{i+1}) = f(x_i + \delta x) = f(x_i) + \delta x \cdot \frac{df}{dx}(x_i)$ .

Cependant, dès que  $\delta x$  dépasse un certain seuil, cette approximation diffère très rapidement de la solution analytique, comme illustré dans la Figure 17.

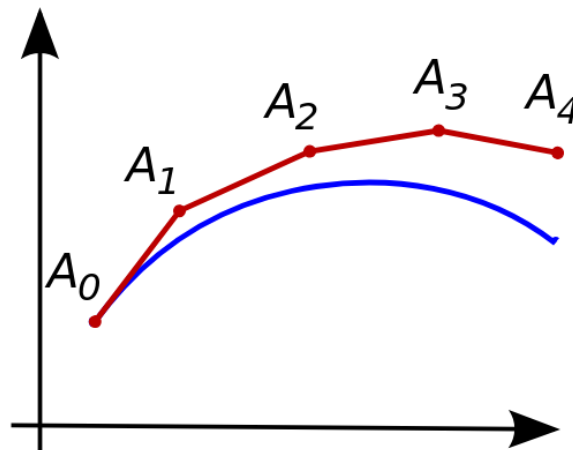


FIGURE 17 – Méthode d'Euler (Wikipedia)

Nous notons  $\delta f$  la variation de  $f$  pour une variation  $\delta x$ , soit  $\delta f(x) := f(x + \delta x) - f(x) = \delta x \frac{df}{dx}(x)$ . Nous pouvons alors écrire  $f(x + \delta x) = f(x) + \delta f(x)$  pour décrire l'évolution.

### 4.3.2 L'algorithme

Nous appliquons la méthode d'Euler pour résoudre dans le temps le système 4.6 à partir des états initiaux  $m(x, y; 0)$  et  $T(x, y; 0)$  grâce à un algorithme. L'idée est de faire varier la variable  $t$  petit à petit dans une boucle en mettant à jour itérativement les deux champs scalaires.

Nous discrétisons les champs  $m$  et  $T$  : on convertit leur domaine de définition continu en un ensemble discrets de coordonnées, c'est-à-dire un quadrillage.

---

**Algorithm 1** Algorithme de la méthode d'Euler pour résoudre le système 4.6

---

**Require:**  $m[x, y], T[x, y]$

▷ états initiaux

1:  $t \leftarrow 0$

2: **while** running **do**

3:  $\delta m \leftarrow -\delta t \times Am \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$

▷ Calcul des variations

4:  $\delta T \leftarrow \delta t \times (\alpha \nabla^2 T - \gamma(T - T_e) - \vec{u}(t) \cdot \nabla T) - \beta \times \delta m$

5:  $m \leftarrow m + \delta m$

▷ Mise à jour des champs et variables

6:  $T \leftarrow T + \delta T$

7:  $t \leftarrow t + \delta t$

8: **end while**

---

À la ligne 4, nous avons utilisé l'égalité  $\delta t \frac{\partial m}{\partial t} = \delta m$  pour remplacer la dérivée, afin d'éviter de la recalculer.

### 4.3.3 Optimisation analytique

Comme vu précédemment, la méthode d'Euler est instable pour des  $\delta t$  importants, particulièrement pour les fonctions qui évoluent rapidement, telle que la fonction exponentielle. Il est donc dans notre intérêt de trouver une solution analytique pour  $m$  à température fixe, afin d'utiliser une expression plus explicite pour la variation  $\delta m$ , et non une relation affine.

L'équation 4.1, pour  $T$  fixe, est satisfaite par l'exponentielle

$$m(t) = m_0 \exp\left(-tA \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)\right)$$

Remarquez que  $m(t_1 + t_2) = m(t_1)m(t_2)$ . Ainsi, selon sa définition, la variation  $\delta m(t) := m(t + \delta t) - m(t)$  peut être écrite sous la forme explicite suivante :

$$\begin{aligned} \delta m(t) &= m(t) \times (m(\delta t) - 1) \\ &= m(t) \times \left( \exp\left(-\delta t A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)\right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nous substituons cette expression  $\delta m$  dans la ligne 3 de l'algorithme 1 pour affiner notre solution numérique.

## 4.4. Résultats et discussion

Dernièrement, nous présentons les résultats d'une mise en œuvre de l'algorithme décrite précédemment puis exposons ce qu'apporte comme solution et ce que laisse comme questions cette modélisation.

### 4.4.1 Python et animations

Ci-dessous sont les animations découlant d'une implémentation de l'algorithme 1 écrite en langage Python. Dans celle-ci, nous mettons successivement à jour dans des boucles "for" les valeurs de chaque cellule, la laplacienne étant évaluée grâce à un noyau discrétisé (formule construite à partir de l'expression de la dérivée sur un quadrillage) dépendant uniquement des valeurs des cellules adjacentes.

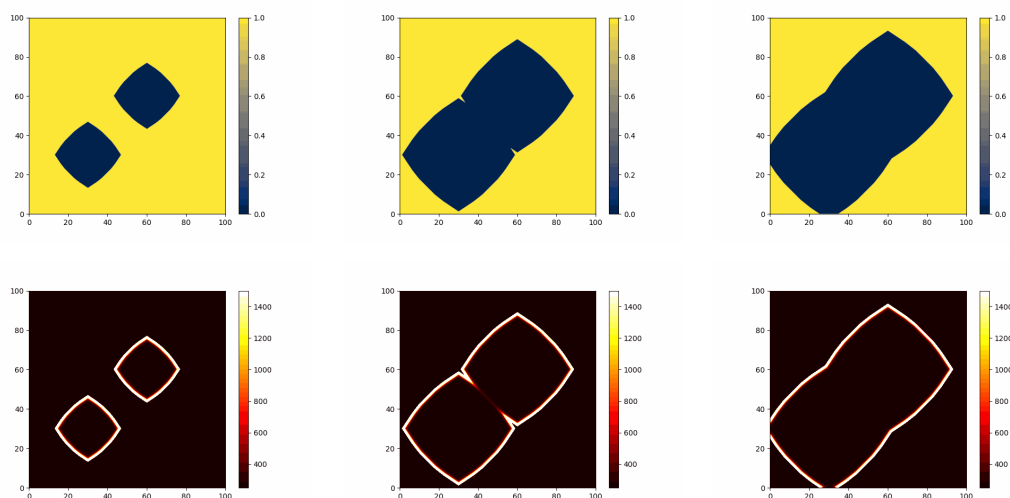


FIGURE 18 – Les champs  $m$  et  $T$  après 25.0 s, 43.0 s et 49.5 s

Grâce à ce logiciel, nous avons pu simuler un feu de forêt provoqué par deux étincelles ponctuelles à  $700^{\circ}\text{C}$  séparées d'environ 40 m, placées dans un champ "d'herbe", peu dense et sans vent. Les images de la Figure 18 provenant de cette simulation montrent comment interagissent les lignes de front, non-circulaires car ayant parti d'un point, de ce feu sur les champs  $m$  et  $T$  respectivement.<sup>1</sup>

### 4.4.2 Suite de la recherche

Dans la suite de notre recherche, nous envisageons d'abord de recenser des paramètres physiques qui décriraient des situations réalistes. Ensuite, nous souhaiterions utiliser ce logiciel afin d'analyser la propagation des lignes de fronts dans diverses conditions : végétation non homogène, vent chaotique, foyers aléatoires... Il serait également intéressant d'utiliser ce programme pour envisager des moyens pour contenir ou arrêter le feu, par exemple, en insérant des fosses et en intervenant sur la température, comme le feraient des pompiers.

Finalement, cette modélisation, bien qu'elle soit polyvalente, laisse des questions simples et essentielles ouvertes : *quelle est la vitesse de propagation du feu?* Nous envisageons une étude empirique de la relation entre ces valeurs et les paramètres libres du modèle afin de répondre à ces questions. Serait-il également possible de résoudre les équations de champs couplées pour des cas particuliers ou en imposant certaines limites afin d'obtenir des réponses analytiques?

1. Consulter ce dossier numérique pour télécharger le code Python et les animations de la Figure 18 : <https://drive.google.com/drive/folders/1rtDrQrxZaamj2FpwJcZ01bxo5MNGMzV7?usp=sharing>.

## 5. Conclusion

Les incendies de forêt représentent un défi complexe tant pour leur prévention que pour leur gestion en temps réel. À travers cette étude, nous avons exploré différentes approches pour modéliser leur propagation, en combinant des outils géométriques, chimiques et mathématiques.

La modélisation géométrique a permis de simplifier la représentation des fronts de flammes à l'aide de cercles et d'ellipses, offrant une visualisation intuitive et des calculs rapides.

L'approche chimique a mis en lumière les mécanismes fondamentaux de la combustion, en particulier le rôle crucial de l'énergie d'activation et de la température.

Enfin, la modélisation par équations différentielles a offert une description plus précise de la dynamique des incendies, intégrant des variables comme la température, la masse combustible et l'effet du vent.

Cependant, ces modèles présentent des limites, notamment dans la prise en compte de facteurs environnementaux complexes (topographie, humidité, végétation hétérogène) ou de comportements chaotiques (vents changeants).

En somme, cette étude souligne l'importance d'une approche pluridisciplinaire pour prédire les incendies de forêt. Une modélisation plus précise et des outils adaptés pourraient un jour améliorer les ressources des secours, réduire les risques écologiques et humains, et contribuer à une lutte plus efficace contre ces catastrophes naturelles.

## Notes d'édition

(1) Lorsqu'il est écrit « Dans cette formule,  $r_1$  est la position initiale du phénomène », il faut entendre que  $r_1$  est la distance de la ligne de front au départ de l'incendie. Le départ de l'incendie est le centre des cercles.

(2) Le cas de l'ellipse ne sera pas abordée dans la suite. On pourra faire des recherches pour élargir la question mais les connaissances sur ces objets ne sont pas nécessaire pour une compréhension du texte.

(3) Dans cette situation, les feux semblent ne pas avoir de rayon initial  $r_1$ . La formule énoncé p. 4 reste valable en prenant  $r_1 = 0$ .

(4) Il semble qu'il y ait une erreur de raisonnement dans le calcul «  $2000 - 5 \times (2 \times 3,5) = 500 \text{ m}$  » : les feux sont répartis sur 2000 m. Le produit  $2 \times 3,5$  représente le diamètre de chaque incendie au départ. En multipliant par 5, on calcule donc la distance que représente les incendies sur les 2000 m. Ce qui reste est alors l'écart à répartir entre les incendies. Il y a 4 intervalles et donc chaque ligne de front des incendies est séparée de  $500/4 = 125 \text{ m}$ .

(5) Il est attesté qu'aux dates indiquées l'homme a domestiqué le feu mais ne le produisait pas. Des premières traces ont été trouvées sur le site de Gesher Benot Ya'akov (Israël), daté d'environ 790 000 ans. (<https://archeorient.hypotheses.org/15057>)

(6) La formule donnant  $f(E \geq E_a)$  cache en fait une loi de probabilité pour que les chocs soient bien orientés (voir Loi d'Arrhenius). La régression linéaire permet de déterminer l'équation de la droite qui passe au plus près de tous les points. Les équations de droites de régression dépendent de la façon dont on calcule la distance à cette droite.