Résultats de l'An 1

l'infini

par Thierry Guilard,
Tle C, 26/01/90

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = +\infty}$$

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbf{N}^*$.

Soit S_n la somme des premiers termes de (u_n).

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

On s'intéresse à la somme de termes de u tels que

$$10^p + 1 \leq n \leq 10^{p+1}, \text{ avec } p \in \mathbf{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$n + 1 > n$, et donc $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Ainsi :

$$\underbrace{\frac{1}{10^p+1} + \frac{1}{10^p+2} + \dots + \frac{1}{2.10^p}}_{10^p \text{ termes}} > \underbrace{\frac{1}{2.10^p} + \dots + \frac{1}{2.10^p}}_{10^p \text{ termes}}$$

$$> 10^p \times \frac{1}{2.10^p}$$

$> \frac{1}{2}$. De même :

$$\frac{1}{3.10^p+1} + \frac{1}{3.10^p+2} + \dots + \frac{1}{4.10^p} > \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4.10^p+1} + \frac{1}{4.10^p+2} + \dots + \frac{1}{5.10^p} > \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{7.10^p+1} + \frac{1}{7.10^p+2} + \dots + \frac{1}{8.10^p} > \frac{1}{4}.$$

Donc :

$$\frac{1}{10^p+1} + \frac{1}{10^p+2} + \dots + \frac{1}{10^{p+1}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8}$$

$$> 1 \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = 1{,}075\right)$$

Comme p décrit $\mathbf{N}$, il existe une infinité de sommes de termes de u tels que $10^p + 1 \leq n \leq 10^{p+1}$.

Toutes ces sommes de termes de u sont strictement supérieures à 1. S_n est donc calculée comme somme de groupements de termes dont la somme est strictement supérieure à 1. La suite S_n tend donc vers l'infini.

C.Q.F.D.

Théorème : Il existe une bijection entre [0, 1[et [0, 1].

par Monique Li (1°S)
Seng Loc Thap (1°S)
Thierry Guilard (TC)
14/02/90

Lycée Jean Racine, 20 rue du Rocher, 75008 Paris

Considérons la suite $u_n = 1/2^n$ (avec $n \geq 1$). Etablissons une bijection entre [0, 1[et [0, 1] en distinguant d'une part les termes de la suite (u_n) et d'autre part tous les nombres restants.

Pour tout $x \in (u_n)$ de [0, 1[on applique la fonction définie par $f(1/2^n) = 1/2^{n-1}$ dans [0, 1]. Pour tout $x \notin (u_n)$ de [0, 1[on applique la fonction définie par $f(x) = x$ dans [0, 1], qui est une fonction bijective.

Pour tout $x' \in (u_n)$ de [0, 1] on applique la fonction définie par $f^{-1}(1/2^{n-1}) = 1/2^n$ dans [0, 1[.

Ainsi, chaque x de [0, 1[a une image par f dans [0, 1] et chaque x' de [0, 1] a un seul antécédent dans [0, 1[(donné par f^{-1}).

Il existe donc une bijection entre [0, 1[et [0, 1]. Par homothétie on peut généraliser la bijection pour tous les intervalles [a, b[(avec $a, b \in \mathbf{R}$).