Carrés Magiques

8	1	6
3	5	7
4	9	2

par Xiao Shu Yeh (Tle C)

Lycée Jean Racine, 20 rue du Rocher, 75008 Paris

Un carré magique est un carré dont les sommes des nombres des cases d'une ligne verticale, d'une diagonale ou d'une ligne horizontale sont égales.

Avec cette définition, il est clair qu'on peut obtenir un carré magique et remplir toutes les cases par un même nombre ;

et la somme de deux carrés magiques du même ordre est encore un carré magique dont la somme des nombres des cases d'une ligne est obtenue en ajoutant les sommes correspondantes des deux carrés magiques.

Le but de notre travail est de savoir comment on peut construire un carré magique à partir d'entiers naturels consécutifs. On cherche tout d'abord un carré magique d'ordre 3. On démontre qu'il existe un et un seul carré magique d'ordre 3 mises à part les diverses transformations géométriques (rotation, symétrie). La méthode utilisée dans le cas du carré d'ordre 3 a pu être généralisée pour les carrés d'ordre impair.

Explication d'une méthode de construction des carrés magiques d'ordre impair (en prenant un exemple d'ordre 3).

	1	2	3	i
1	1	2	3	
2	4	5	6	
3	7	8	9	
j				

figure (1)

On place les nombres de 1 à 9 dans un repère (figure 1). Puis, on forme deux carrés magiques dont les cases sont remplies uniquement avec les i et les j respectivement de la manière suivante : une diagonale est remplie avec i = 2 et sur chaque colonne chacun des trois termes i avec i ∈ {1, 2, 3} ne figure qu'une seule fois. (On remplit une diagonale avec i = 2, car si c'étaient les 1 ou les 3 qui occupaient la diagonale, la somme des nombres en diagonale serait différente de celle des lignes ou des colonnes.)

On procède de la même manière pour les j. On a alors deux carrés magiques : l'un pour i, l'autre pour j (figure 2).

figure (2)

le carré des i				le carré des j		
2	1	3		1	3	2
3	2	1		3	2	1
1	3	2		2	1	3

Si on prend les carrés de la figure (2) de façon que i = 2 et j = 2 occupent la même diagonale, on obtient alors un carré magique avec la répétition des seuls nombres 1, 5, 9. Mais lorsque l'on prend i = 2 et j = 2 de façon qu'ils occupent les deux diagonales différentes, on obtient un carré magique avec les nombres de 1 à 9.

[Avec un carré d'ordre 2 n + 1 (n ∈ **N***), c'est i = n + 1 et j = n + 1 qui occupent les diagonales différentes.]

A l'aide des carrés obtenus à la figure (2) et du repère de la figure (1) on va placer les nombres de 1 à 9 dans le carré d'ordre 3. Par exemple, pour la case B, le nombre correspondant dans le carré des i est 2 et le nombre du carré des j est 1. Or dans le repère de la figure (1), à i = 2 et j = 1 correspond le nombre 2. Donc B = 2.

De la même manière:
D = (3, 2) = 6,
G = (2, 2) = 5,
L = (2, 3) = 8,
etc …

figure (3)

le carré d'ordre 3

		B	C	D
		F	G	H
		J	K	L

Démonstration de la méthode précédente (toujours sur l'exemple de l'ordre 3).

En observant la figure (1) on remarque que pour la même valeur de i, lorsqu'on passe de j à j+1, le nombre de la case correspondante augmente de l'ordre du carré (ici, c'est 3). ex :
(i = 1 et j = 1) = 1 (i = 1 et j = 2) = 1 + 3 = 4
(i = 2 et j = 2) = 5 (i = 2 et j = 3) = 5 + 3 = 8
D'où la formule :

$$A_{ij} = i + (j - j_{min}) x\ n \qquad (3)$$

où n représente l'ordre du carré, j_{min} est la valeur la plus petite de j, A_{ij} le contenu de la case ij.

De plus, à la figure (2), les i et les j ont constitué deux carrés magiques, dont la somme est un autre carré magique ; d'autre part la formule (3) ne fait intervenir que la somme des i avec les j, donc on a un carré magique formé avec les nombres de 1 à 9. On a ainsi au moins un carré magique pour chaque ordre impair, avec les entiers naturels consécutifs.

L'utilisation de la formule (3) avec la figure (2).

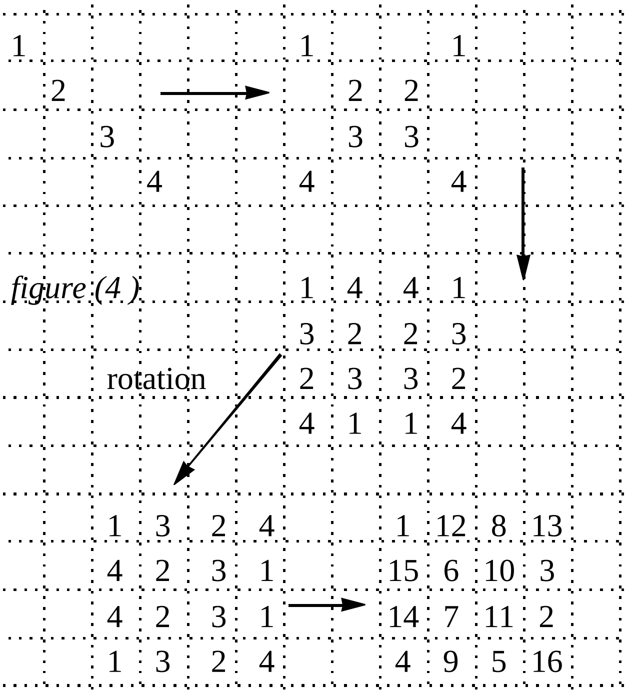
Prenons toujours la case B, d'où i = 2 et j = 1. Comme ici j_{min} =1 et n = 3, on a

$$A_{21} = 2 + (j - 1)x\ 3 = 2,$$

soit : le contenu de B est 2. De même pour la case C : i = 1, j = 3 et A_{13} = 1 + (3 - 1)x 3 = 7, soit : la case B est occupée par le nombre 7…

On a ainsi la construction des carrés magiques d'ordre impair. **Il nous reste encore les carrés d'ordre pair.**

Dans la démonstration précédente, on obtient la formule (3) indépendamment de la parité de l'ordre du carré. Alors la formule (3) reste valable pour la construction d'un carré d'ordre pair. Et, on doit trouver encore deux carrés magiques avec les i et les j.



La figure (4) prend l'exemple du carré d'ordre 4, d'où i ∈ {1, 2, 3, 4} et la figure (5) celui du carré d'ordre 6 : i ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6}. En faisant une rotation on obtient le carré formé par les j. En appliquant la formule (3) sur les deux carrés construits, on obtient des carrés magiques d'ordres 4 et 6.

Après avoir rempli les diagonales, figures (5a) et (5b), on remplit les colonnes extrêmes par les 6 et les 1 — figure (5c). Sur une ligne, on remplit deux par deux les cases symétriques avec des nombres de somme 7 ; sur une colonne, un même nombre se répète 3 fois, et son complément à 7 aussi — figure (5d). La construction se termine comme pour les ordres impairs, figures (5d) et (5e).

On obtient finalement un carré magique pour chaque ordre ≥ 3 ; comment les avoir tous, combien y en a-t-il ?

Un essai sur le nombre possible de carrés ainsi obtenus pour un ordre pair.

Lorsqu'on construit un carré magique d'ordre 2p (pour p ≥ 2) d'après la méthode exposée précédemment, on a :

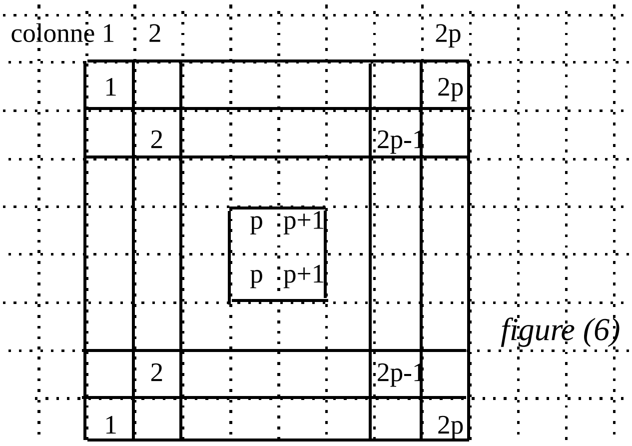


figure (6)

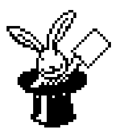
Après le remplissage des deux diagonales, et pour la colonne 1, il reste (2p - 2) cases à remplir. On peut remplir (p - 2) cases avec le chiffre 1, et les p cases restantes avec le nombre 2p. Autrement dit, il s'agit de déterminer combien on a de façons de remplir (p -2) des (2p - 2) cases restantes avec des 1 :

on a C_{2p-2}^{p-2} possibilités.

Dans la colonne 2, on a autant de possibilités que dans la colonne 1 pour remplir (p - 2) cases avec le chiffre 2, et les p cases restantes avec le nombre 2p - 1. Ainsi pour les p premières colonnes. Chacune des p dernières colonnes correspond à l'une des p premières : la colonne 2p correspond à la colonne 1, etc.

On a donc (C_{2p-2}^{p-2}) carrés possibles.

Question : le carré des j peut être symétrique d'un autre, et les carrés magiques construits sur l'un ou l'autre aussi. Combien construit-on ainsi de carrés réellement différents ?



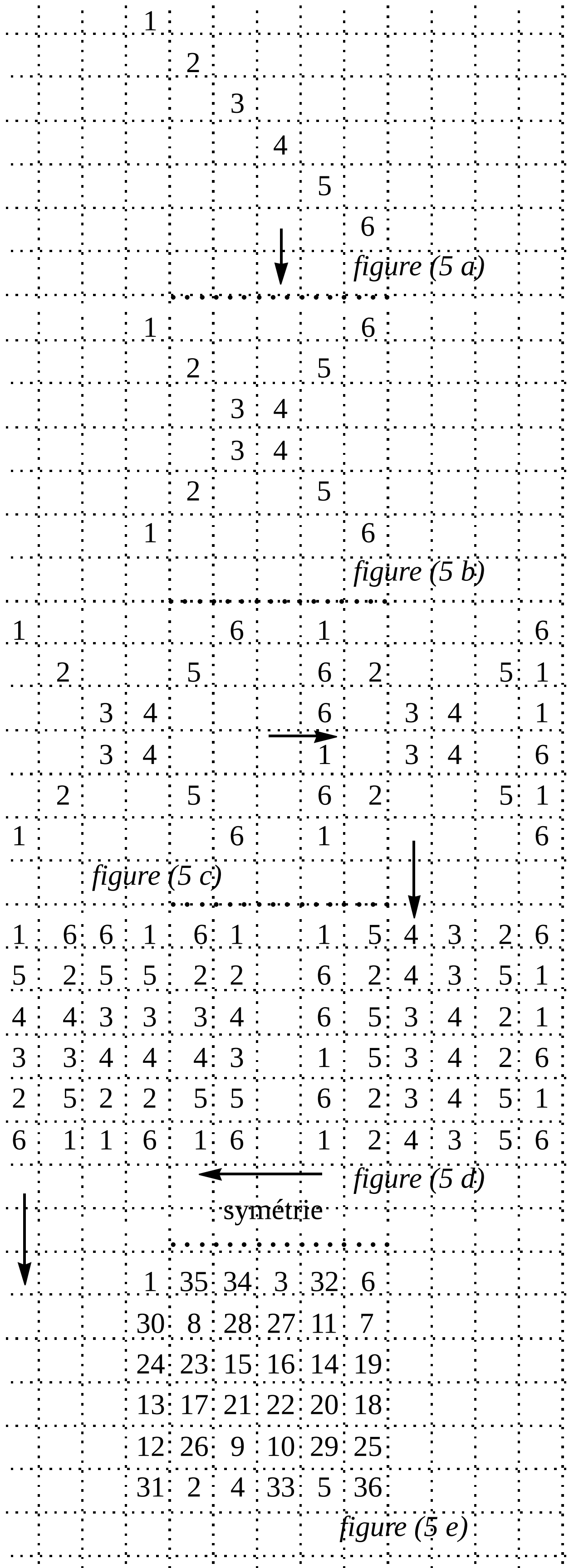


figure (5 a)

figure (5 b)

figure (5 c)

figure (5 d)

figure (5 e)