Graphes

par Bernard BLANC, Robert BOSSY, David GALLIN, Joseph HENRY, Olivier MODREGO, Laurent MONGIAT, Stéphanie MUSI

Lycée Jean Racine, 20 rue du Rocher, 75008 Paris
Lycée Georges Braque, 21 rue Victor Puiseux, 95104 Argenteuil Cédex

Tout au long de l'année, nous nous sommes penchés sur différents problèmes qui pouvaient se résoudre en utilisant la théorie des graphes :

— Les 7 ponts de Königsberg
— Le problème des 4 cubes coloriés
— Sherlock Holmes (résolution d'une intrigue policière)
— Ordonnancement, affectation

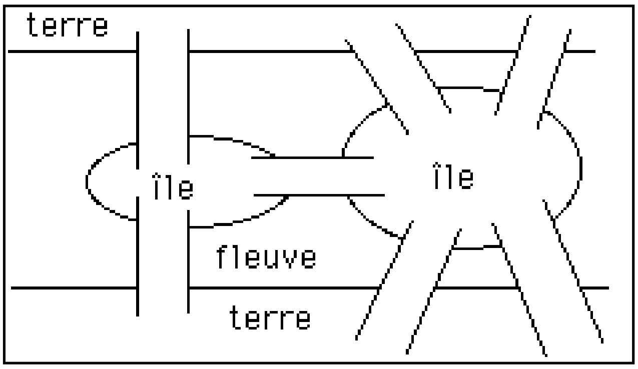
Nous avons également abouti à un début d'étude sur les automates avec le régionnement
et le Théorème des quatre couleurs (à savoir : que toute carte plane est coloriable à l'aide d'au plus quatre couleurs de telle sorte que deux régions voisines n'aient jamais la même couleur), théorème conjecturé par Euler
et (uniquement) démontré à l'aide d'un ordinateur au début des années ’80.

1. Les sept ponts de Königsberg

Un graphe est défini par un ensemble de points appelés « sommets » et par un ensemble de lignes appelées « arêtes » qui relient entre eux certains sommets. Une arête entre deux sommets indique que ces deux sommets sont en relation.

Le problème :

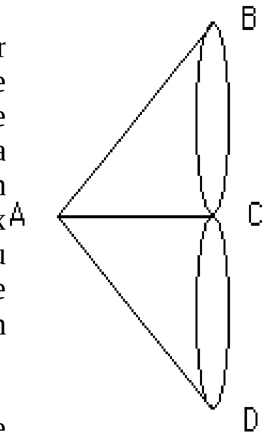
Dans la ville de Königsberg, il y a sept ponts disposés comme suit :



On voudrait organiser un circuit touristique en posant comme seule condition que chacun des sept ponts ne devra être franchi qu'une et une seule fois. Il n'est pas nécessaire de revenir à son point de départ.

La résolution par les graphes :

Le circuit à effectuer peut être représenté par le « multigraphe » ci-contre (c'est un élargissement de la notion de graphe : dans un graphe, entre deux sommets, il y a une arête au plus tandis que dans le multigraphe, il peut y en avoir plusieurs).

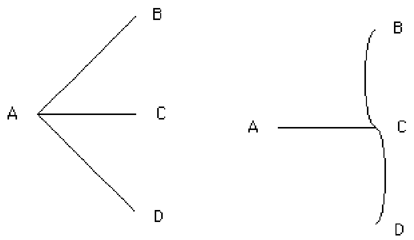


Le point de départ ne peut avoir qu'un nombre impair d'arêtes adjacentes car il a nécessairement une arête de départ et un nombre pair d'autres arêtes par lesquelles on peut partir et revenir en ce point. Il en est ainsi de même pour le sommet final qui doit permettre d'arriver et de passer autant de fois qu'il y a de couples d'autres arêtes. Par contre, les sommets intermédiaires doivent présenter un nombre pair d'adjacentes pour que l'on puisse passer et repasser sans aboutir à une impossibilité.

On constate que le graphe ayant tous ses sommets impairs (3 ou 5), il ne peut satisfaire aux exigences du problème qui n'admet donc aucune solution.

Généralisation :

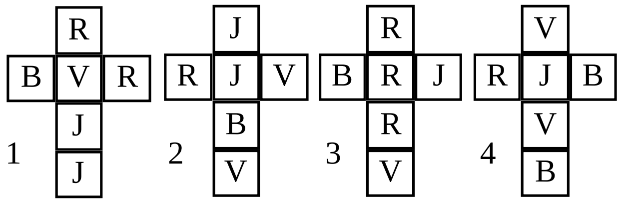
La méthode utilisée dépend ici quelque peu du problème envisagé. A celle qui consiste à essayer la totalité des solutions (et a séduit certains malgré sa longueur) s'oppose celle que nous avons déduit de cette résolution. Tous les graphes qu'on peut soumettre à la question posée par ce type de problème sont simplifiables. En effet la totalité des arêtes qui permettent d'effectuer un circuit fermé (retour au point initial) peuvent être éliminées car elles n'influent pas sur le reste. Les sommets n'étant après toutes les simplifications possibles plus reliés à rien sont inutiles. Cela dépend de la parité des sommets. Le graphe utilisé ici peut être simplifié de deux manières pour aboutir à ce qui suit



et est de toute évidence impossible.

2. Les quatre cubes coloriés

Soit C1, C2, C3 et C4 quatre cubes de même taille coloriés de quatre couleurs. Les quatre couleurs sont utilisées une fois au moins pour chaque cube. Ceci sera notre seule contrainte. Sinon, les cubes sont coloriés aléatoirement.



Le problème :

Il nous faut trouver une façon d'empiler les cubes de telle sorte que sur chaque côté de la pile apparaissent les quatre couleurs.

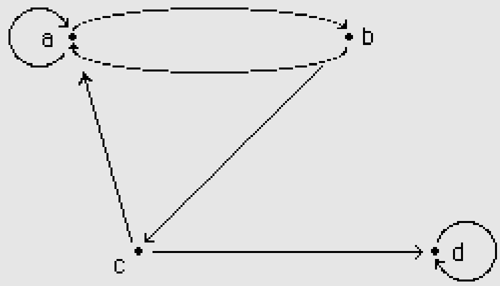
Théorie des graphes

Un ingénieur trace le schéma d'un réseau électrique, un chimiste fait un croquis pour indiquer les liaisons chimiques des atomes d'une molécule complexe, …

Toutes ces représentations ont en commun des points (ici, des connexions électriques, des atomes) reliés par des lignes : on appellera cette représentation GRAPHE dès 1930. Aujourd'hui, la théorie des graphes est en pleine expansion. Des centaines d'énigmes bien connues, apparemment sans relation, relèvent directement de la théorie des graphes. Nous allons vous présenter ici le vocabulaire de base, nécessaire pour utiliser ces graphes.

graphes orientés
Un graphe orienté G est défini par un ensemble de sommets X et un ensemble d'arcs U tels que :
G = (X, U), un arc étant défini par la donnée d'un couple (x, y) de sommets.
Exemple : $G_1 = (X_1, U_1)$ avec $X_1 = \{a, b, c, d\}$ et $U_1 = \{(a,b),(b,a),(a,a),(b,c),(c,a),(c,d),(d,d)\}$.

représentation sagittale
C'est un dessin dans lequel un point figure un sommet et une flèche figure un arc. Exemple :

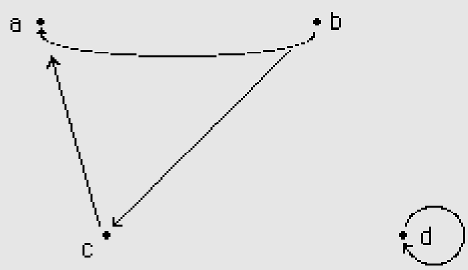


remarque : (a,b) et (b,a) sont deux arcs différents ; pour un arc (x,y), x est appelé extrémité initiale et y extrémité terminale.

chemin
C'est une séquence d'arcs de U telle que l'extrémité terminale d'un arc coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc suivant (sauf éventuellement pour le dernier). Exemple : un chemin de a à c : ((a,b),(b,c)) ou (a,b,c).

circuit ou cycle
C'est un chemin dont l'extrémité initiale du premier arc coïncide avec l'extrémité terminale du dernier arc. Exemple : ((a,b),(b,c),(c,a)) ou (a,b,c,a).

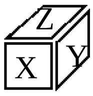
graphe partiel
Un graphe partiel G” de G s'obtient à partir de G par suppression de certains arcs. Exemple : G” = (X”,U”) = $(X_1$, U”) avec U” = {(b,a),(b,c),(c,a),(d,d)}

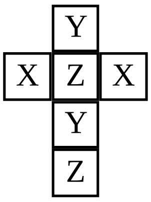


Sans notre (unique) contrainte, on pourrait avoir par exemple les quatre cubes ayant chacun trois faces en coin de même couleur. L'empilement aurait alors huit faces de même couleurs alors qu'il en faut quatre.

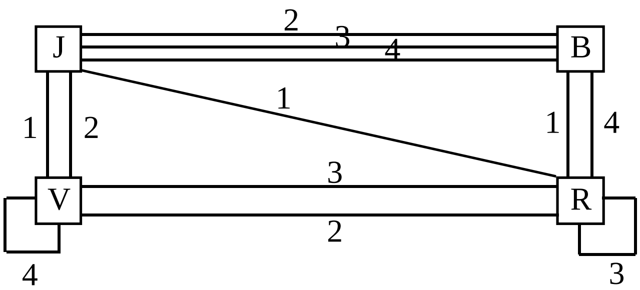
La résolution par les graphes :

Nous allons considérer les six faces coloriées de chaque cube comme trois paires de faces opposées.





Nous allons construire un graphe de quatre sommets représentant les quatre couleurs et de douze arêtes représentant elles les 12 paires de faces (3 faces opposées par cube et 4 cubes = 12 faces). Chaque arc portera un chiffre qui correspond au cube ; il y aura trois arcs par cube. On obtient ce graphe :



Comment trouver la solution à partir du graphe ?

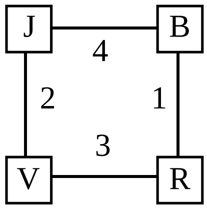
Nous devons utiliser …

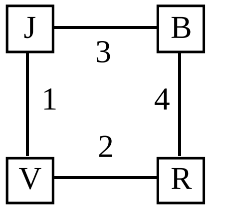
… huit arcs de cubes différents, c'est-à-dire portant les numéros 1, 2, 3 et 4.

… chaque couleur quatre fois.

Pour cela on va chercher deux graphes partiels qui correspondront l'un aux côtés avant-arrière de la pile et l'autre aux côtés gauche-droite de la pile. Ces deux graphes partiels auront quatre arcs chacun, portant les numéros 1, 2, 3 et 4 et le graphe sera de degré 2, c'est-à-dire qu'on utilisera deux fois les quatre couleurs.

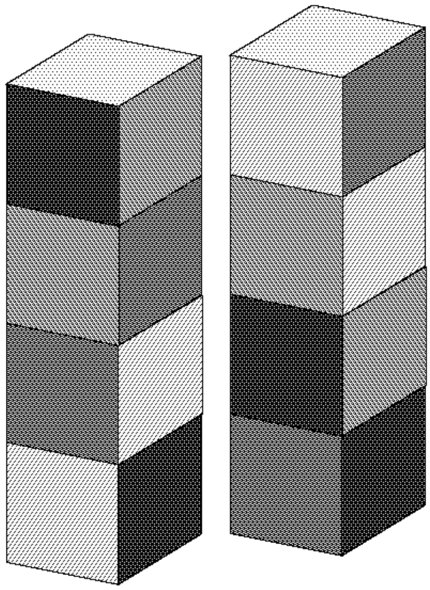
Les deux seuls graphes partiels correspondant sont les suivants :





Ainsi, il faudra placer les cubes pour les côtés avant-arrière : et gauche-droite :

	côtés avant-arrière	gauche-droite
le cube 1 :	B — R	J — V
le cube 2 :	V — J	V — R
le cube 3 :	R — V	B — J
le cube 4 :	J — B	R — B



3. Sherlock Holmes

Il y a quelques années, le Duc de Densmore périt dans l'explosion qui détruisit son château. Son testament fut détruit ; or celui-ci avait tout pour déplaire à l'une de ses sept ex-femmes.

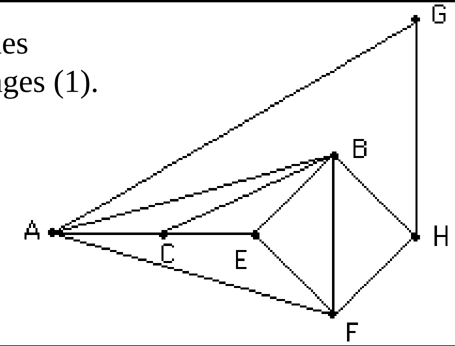
Le problème :

Peu avant le crime, elles étaient toutes venues au château et elles jurèrent que ce fut la seule fois où elles s'y étaient rendues. Elles peuvent donc toutes être coupables, mais le dispositif ayant provoqué l'explosion avait été dissimulé dans une armure dans la chambre du Duc, et sa pose avait nécessité plus d'une visite. Donc la coupable a menti : elle est venue plusieurs fois.

Ann dit avoir rencontré Betty, Charlotte, Félicia et Georgia ; Betty dit avoir rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia, et Helen ; Charlotte dit avoir rencontré Ann, Betty et Edith ; Edith dit avoir rencontré Betty, Charlotte et Félicia ; Félicia dit avoir rencontré Ann, Betty, Edith et Helen ; Georgia dit avoir rencontré Ann et Helen ; Helen dit avoir rencontré Betty, Félicia et Georgia.

La résolution par les graphes :

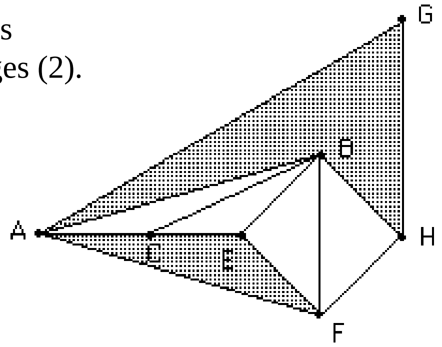
Graphe des témoignages (1).



On construit un graphe dont les sommets représentent les sept femmes, et on trace une arête entre deux sommets lorsque deux femmes se sont rencontrées. On va introduire la notion de graphe triangulé pour trouver la coupable (et démontrer sa culpabilité) et déterminer le nombre de fois où elle est venue. On aura considéré que les six innocentes n'ont pas menti.

Ce graphe doit être un graphe d'intervalles or il n'est pas triangulé et donc, d'après la propriété démontrée ci-contre, n'est pas un graphe d'intervalles. En effet, on distingue deux cycles qui ne sont pas triangulés. Les femmes correspondant aux sommets de chacun de ces cycles peuvent être coupables, mais Ann est la seule qui figure dans les deux cycles. Donc Ann a assassiné le Duc de Densmore.

Graphe des témoignages (2).



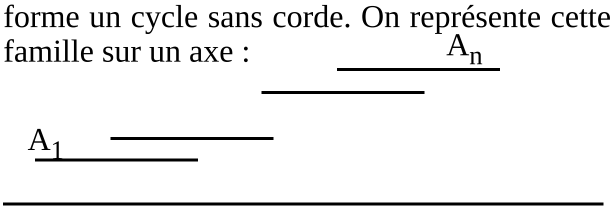
Pour connaître le nombre de fois où elle est venue, on transforme le graphe G en un graphe G' d'intervalles.

Un graphe est **triangulé** si tout cycle de longueur supérieure à 3 admet au moins une corde : une arête reliant deux sommets non consécutifs du cycle.

On considère, sur une droite, une famille A d'intervalles $A_1, A_2, \ldots, A_n$. On peut construire le graphe d'**intervalles** dont les sommets $a_1, a_2, \ldots, a_n$ représentent les intervalles $A_1, A_2, \ldots, A_n$; deux sommets sont joints par une arête si et seulement si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

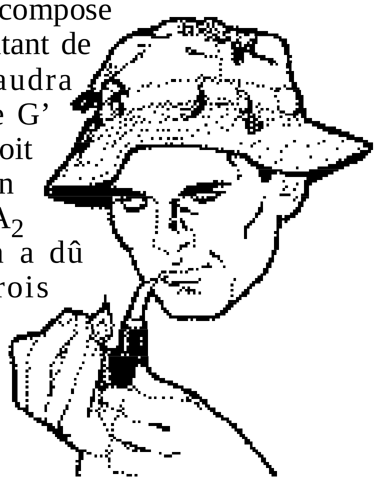
Tout graphe d'intervalles est triangulé.

Soit la famille $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ telle que le graphe d'intervalles correspondant forme un cycle sans corde. On représente cette famille sur un axe :



On remarque que A_1 et A_n ne peuvent avoir d'intersection non vide que si A_1 ou A_n ont une intersection non vide avec tous les autres intervalles. Donc le cycle doit avoir une corde au moins. Donc tout graphe d'intervalle est triangulé.

Pour cela on décompose le sommet A en autant de sommets qu'il faudra pour que le graphe G' soit triangulé : on doit faire éclater A en trois sommets A_1, A_2 et A_3. Donc Ann a dû venir au moins trois fois.



Elémentaire.

Graphe des témoignages (3).