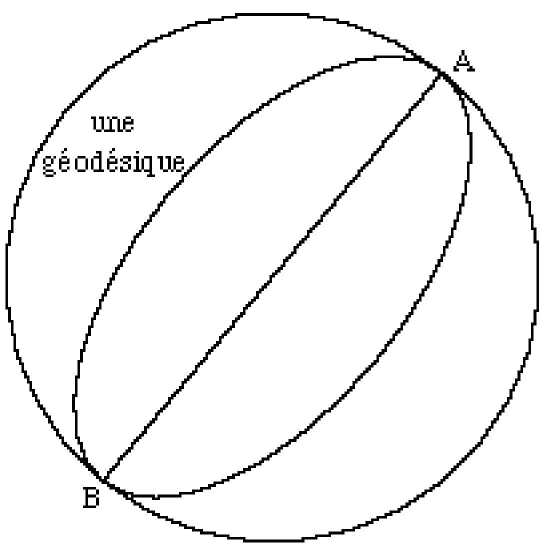
La Sphère.

par Anne FOURÉ, Antonino JOAO, Simohamed KHABIR, Alice MERLET

Lycée Jean Racine, 20 rue du Rocher, 75008 Paris

Etudions les droites et leurs propriétés sur la sphère, d'après les connaissances que l'on a du plan. Nous verrons que certains axiomes vérifiés dans le plan ne le sont pas sur la sphère. La sphère n'est pas une figure appartenant à la géométrie euclidienne.



Définition de la droite sur la sphère.

Dans le plan, la droite réalise le plus court chemin entre deux points. Sur la sphère, le plus court chemin n'est pas représenté par des droites, mais par des géodésiques, qui sont les grands cercles de la sphère, ceux qui passent par des points antipodaux. Donc :

droites dans le plan = géodésiques sur la sphère

Propriétés des géodésiques.

Axiome d'Euclide ... Est-ce que par deux points, il ne passe qu'une et une seule géodésique ?

Si les deux points sont antipodaux, il passe une infinité de géodésiques par ces deux points. Par exemple, s'il s'agit du pôle sud et du pôle nord, il y passe une infinité de méridiens.

Si les deux points ne sont pas antipodaux, il ne passe qu'une et une seule géodésique.

Démonstration :

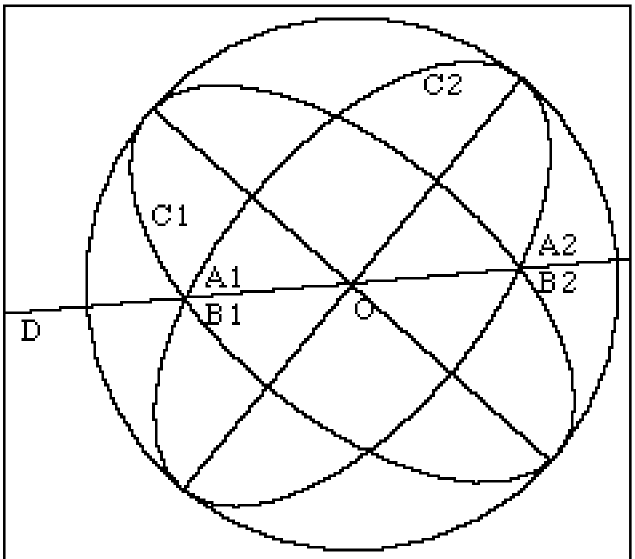
Soient C_1 et C_2 deux géodésiques, et P_1 et P_2 les plans les contenant. Les géodésiques ont le même centre O, et le même rayon R (le rayon de la sphère). L'intersection des plans P_1 et P_2 est une droite D.

Puisque le centre O appartient aux deux plans, il appartient aussi à la droite D, et D coupe les géodésiques C_1 et C_2 en deux points chacune. Soient A_1 et A_2 les points d'intersection de D avec C_1 et B_1 et B_2 les points d'intersection de D avec C_2. Alors :

$$OA_1 = R \qquad OA_2 = R$$
$$OB_1 = R \qquad OB_2 = R.$$

Donc toutes ces distances sont égales. Comme O, A_1, A_2, B_1, B_2 appartiennent à D, ils sont alignés, donc on a : $A_1 = B_1$ et $A_2 = B_2$ ou $A_1 = B_2$ et $A_2 = B_1$. Donc deux géodésiques distinctes, de même centre et de même rayon, ont deux points en commun, antipodaux car diamétralement opposés.

Ainsi par deux points non antipodaux, il ne passe qu'une et une seule géodésique.



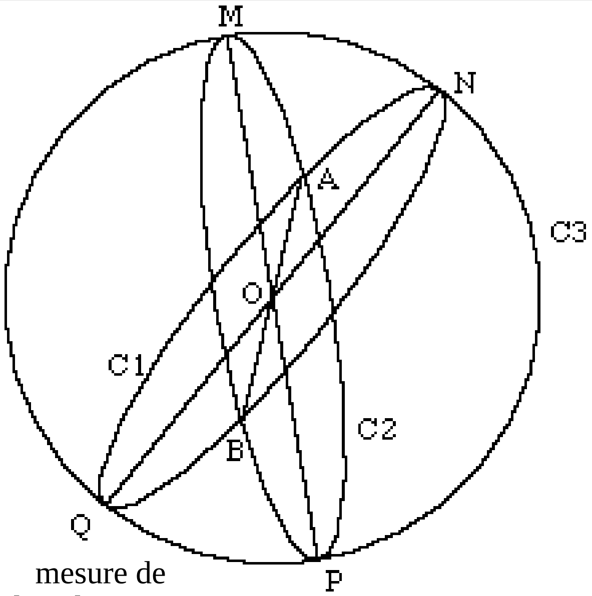
par deux points antipodaux, il passe une infinité de géodésiques

Le parallélisme.

D'après la démonstration précédente, les géodésiques d'une sphère se coupent en deux points antipodaux. Il n'existe donc pas de géodésiques parallèles (par analogie, il n'existe pas de diamètres parallèles dans un cercle).

L'orthogonalité.

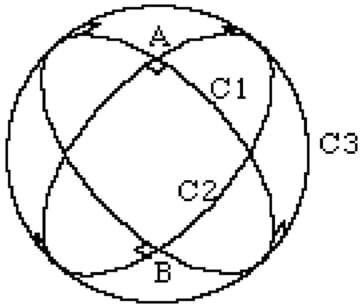
Comment mesurer un angle sur une sphère ? On suppose le rayon de la sphère de 1. Soient deux géodésiques C_1 et C_2 ; elles se coupent en deux points A et B. Pour mesurer un angle en A, on mesure la longueur en radians de l'arc QP du cercle qui passe par les quatre points antipodaux M, N, P, Q des deux diamètres de C_1 et C_2, perpendiculaires au diamètre AB de la sphère.



mesure de l'angle en A

Par exemple, si les deux géodésiques se coupent à angle droit, c'est-à-dire en formant quatre angles égaux, l'arc de cercle QP mesurera $\pi/2$ radians (le rayon de la sphère étant 1).

Propriété :



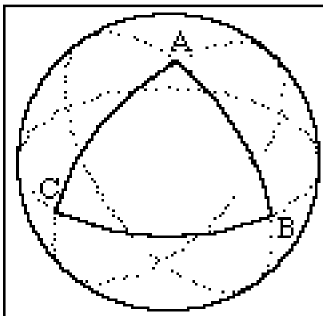
deux géodésiques perpendiculaires ne peuvent être perpendiculaires qu'à une et une seule troisième géodésique

Particularités des figures géométriques.

Considérons que les figures suivantes sont construites à partir de géodésiques ou de segments de géodésiques.

LE TRIANGLE

Il est formé par trois géodésiques sécantes ; ***la somme de la mesure de ses angles est comprise entre 180 degrés et 900 degrés.***



la somme des angles d'un triangle est comprise entre 180° et 900°

Démonstration :

— remarque : seul le point n'est pas soumis à la déformation par la courbure de la sphère. Donc un point dans le plan s'identifie à un point sur la sphère. Dans le plan, la somme de la mesure des angles de tout triangle est égale à 180 degrés ; admettons qu'il en soit de même pour un triangle point. Ainsi un triangle point sur la sphère a la somme de ses angles égale à 180 degrés.

— Considérons le cas d'un triangle formé par trois géodésiques confondues. Les trois sommets se trouvent sur une même géodésique. La somme de ses angles est donc 3 x 180 = 540 degrés.

remarque : soit un triangle sur la sphère ; on peut considérer ses angles rentrants ou saillants.

— Dans le cas du triangle aux trois sommets alignés, la somme des angles rentrants et saillants est : 540 + 540 = 1080 degrés.

La somme d'un angle rentrant et d'un angle saillant est toujours égale à 360 degrés, donc la somme des angles rentrants et saillants d'un triangle est toujours égale à 360 x 3 = 1080 degrés.

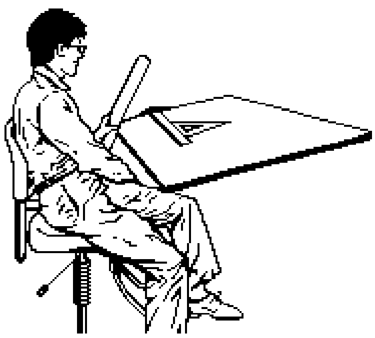
Si on considère le triangle point sur la sphère, la somme de ses angles saillants est égale à 180 degrés. Donc la somme de ses angles rentrants est égale à : 1080 - 180 = 900 degrés.

— DONC la somme des angles d'un triangle sur la sphère est bien comprise entre 180 degrés et 900 degrés.

LE CARRÉ

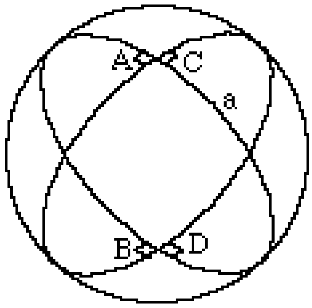
Il est impossible de construire un carré sur la sphère ayant les mêmes propriétés que le carré du plan, car il n'existe pas de droites parallèles sur la sphère. Cependant il est possible de trouver des figures géométriques dont certaines propriétés sont semblables à celles des figures du plan. De plus on ne peut pas parler de côté entre deux points antipodaux car il passe une infinité de géodésiques entre ces deux points.

Propriétés d'un carré :
— côtés opposés parallèles et égaux ;
— diagonales égales, se coupant à angle droit et en leur milieu ;
— quatre angles droits.



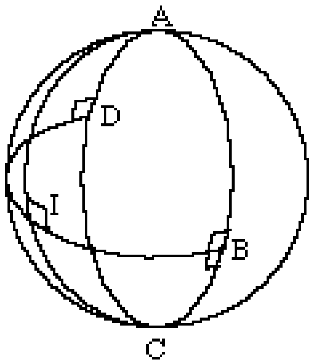
Exemples de figures que l'on a pu construire :

Dessin 1.
— quatre côtés égaux
— quatre angles droits
— deux sommets confondus
— longueur d'un côté = 1/2 géodésique



exemple d'une figure dont les propriétés se rapprochent de celles du carré : côtés égaux, quatre angles droits, mais deux sommets confondus

Dessin 2.
— quatre côtés égaux
— diagonales perpendiculaires et égales à 1/2 géodésique
— longueur d'un côté = $\pi/2$ radians avec R = 1
— les angles sont de 180 degrés



autre exemple de "carré", avec des angles de 180°

Dessin 3. "Rectangle" avec
— quatre côtés
— côtés opposés égaux deux à deux
— quatre angles droits
— largeur = 1/4 de géodésique
— longueur = 1/2 géodésique

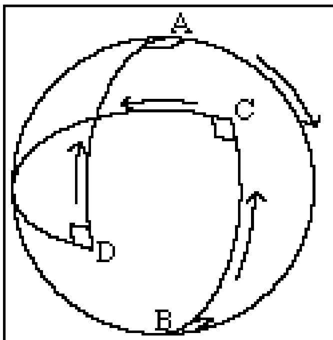


figure se rapprochant du rectangle : largeur = 1/4 de géodésique, longueur = 1/2 de géodésique

Ces figures géométriques aux propriétés très particulières nous montrent clairement que la géométrie de la sphère est différente de celle du plan ; elle est dite « non euclidienne ».