Collège Victor Hugo, rue Elsa Triolet,
93160 Noisy-le-Grand
Collège l'Arche Guédon, 77200 Torcy

polyèdres

Polyèdre : c'est un volume constitué de plusieurs polygones réguliers.

On distingue, parmi les polyèdres, quatre groupes :
les polyèdres réguliers convexes,
les polyèdres réguliers concaves,
les polyèdres irréguliers convexes,
les polyèdres irréguliers concaves.

En un premier temps, nous étudierons les duaux des polyèdres, et en un second temps, le problème des coups de scie sur les polyèdres.

Le dual d'un polyèdre

Propriété de la dualité : les nombres de faces et de sommets sont inversés lorsqu'on passe d'un polyèdre à son dual.

Construction du dual d'un polyèdre régulier convexe : nous savons que le cube a six faces et huit sommets. On imagine une sphère circonscrite au volume (dessin 2, figure 1). On construit les plans tangents en chaque sommet (dessin 2, figure 2). On obtient ainsi un polyèdre régulier de six sommets et huit faces. Nous avons donc le dual du cube : l'octaèdre (dessin 2, figure 3).

Des points restent obscurs : comment construire le dual d'un polyèdre irrégulier convexe ? d'un polyèdre régulier concave ?

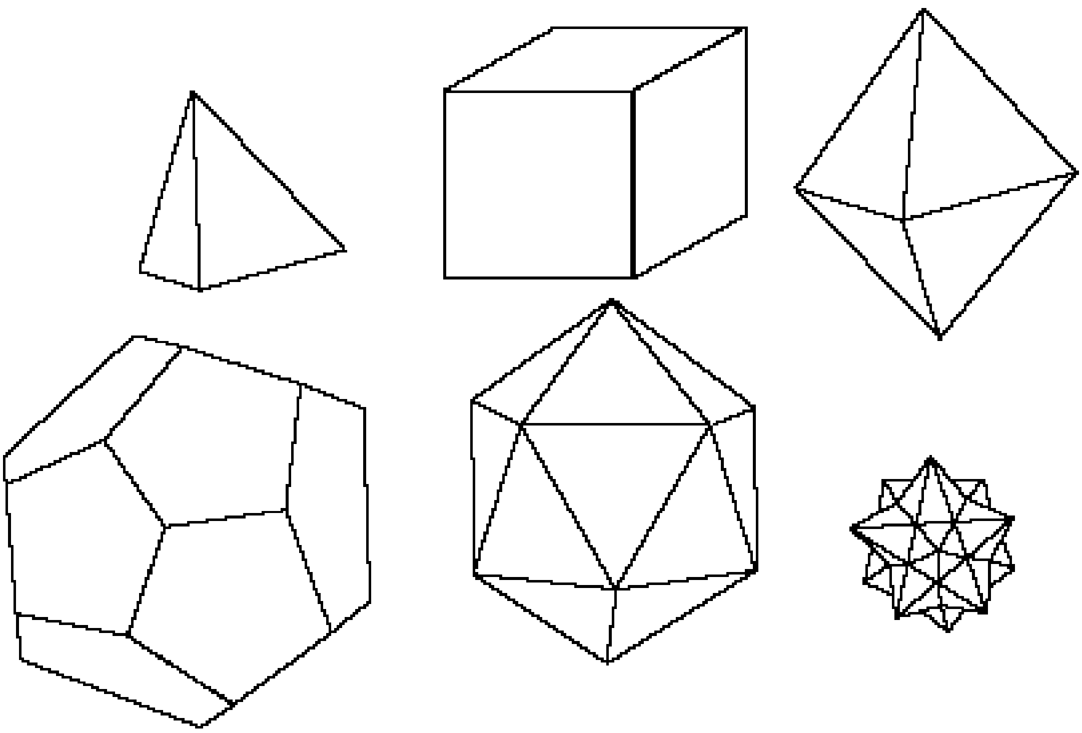
Les symboles dans la dualité

$$3^4$$

Qu'est-ce ?

C'est le symbole du cube : 3 est le nombre de faces vues d'un sommet ; l'exposant, 4, est le nombre de côtés d'une face.

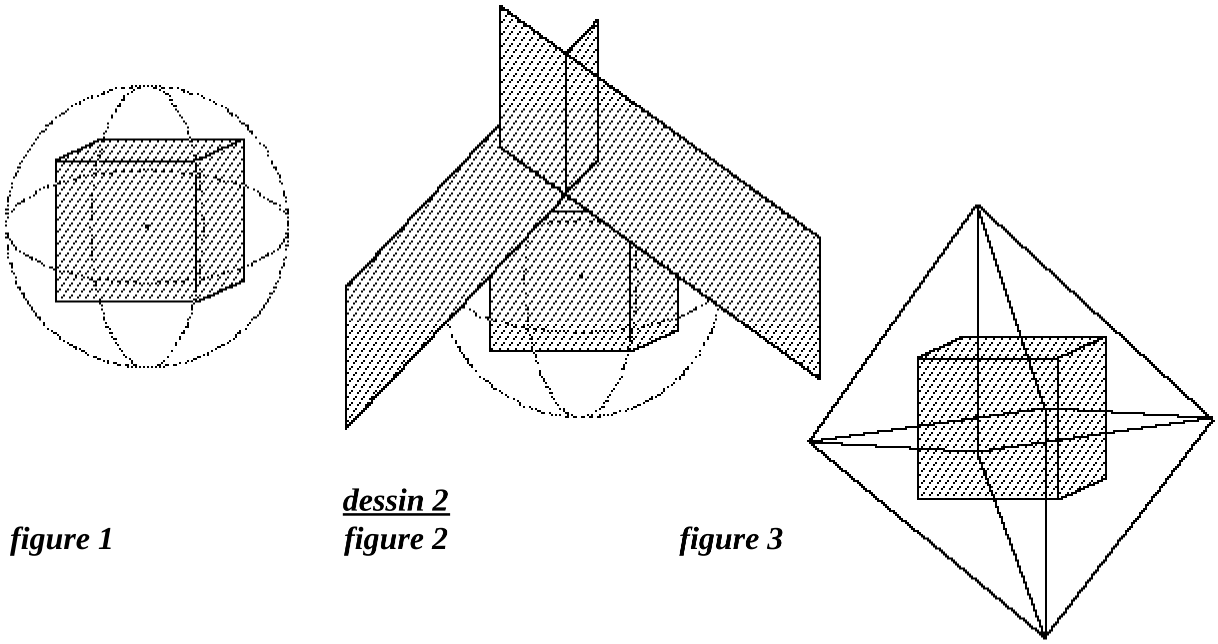
Le symbole de l'octaèdre est 4^3. Nous remarquons toujours la dualité dans l'échange du nombre et de son exposant.



dessin 1 :

tétraèdre,
cube,
octaèdre,
…

…
dodécaèdre,
icosaèdre,
petit dodécaèdre étoilé



dessin 2

figure 1 ***figure 2*** ***figure 3***

Le problème des coups de scie

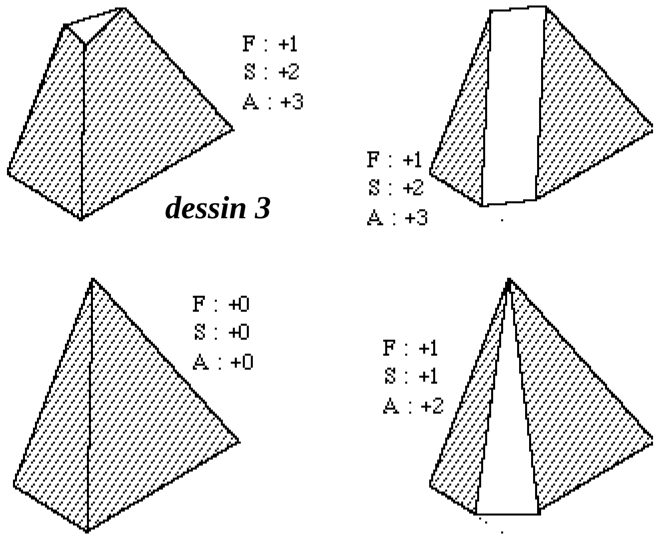
Nous nous sommes posé la question de savoir quel est le nombre de faces, de sommets, d'arêtes que l'on pouvait obtenir en donnant 10 coups de scie sur un polyèdre.

La complexité du problème dépend de la puissance de chaque sommet (c'est-à-dire le nombre d'arêtes se rejoignant sur chaque sommet) et du nombre de faces, de sommets, d'arêtes que comporte le polyèdre étudié. Nous nous sommes donc limités au cube et au tétraèdre.

Le tétraèdre.

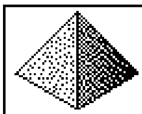
Nous nous sommes tout d'abord demandé quelles étaient les différentes manières de donner le 1er coup de scie. Nous en avons trouvé cinq : (dessin 3)

→ en coupant un sommet (cas 1)
→ en coupant le long d'une arête (cas 2)
→ en coupant le long d'une face (cas 3)
→ en coupant par une section passant par un sommet et en coupant un autre (cas 4)
→ en coupant par une section passant par un sommet et en coupant deux autres (cas 3)
Remarque : les cas 5 et 3 ont un résultat identique.



dessin 3

En prenant les cas 1 et 2, qui sont apparemment les plus avantageux, on s'aperçoit que la meilleure façon de donner le second coup de scie est de couper à nouveau un sommet ou une arête. Nous aurons donc :

	1er coup de scie	au bout de 10 coups de scie	Bilan
Faces	+ 1	+ 1 x 10	+ 10
Sommets	+ 2	+ 2 x 10	+ 20
Arêtes	+ 3	+ 3 x 10	+ 30

Mis à part les cas 1 et 2, le cas le plus avantageux est le cas 4 qui transforme le tétraèdre en pyramide à base quadrilatère.

Ce coup de scie (n°4) augmente pourtant la puissance du sommet principal. Si, au deuxième coup, on coupe ce sommet, on rajoute : 1 face, 3 sommets, 4 arêtes. Alors que si l'on recoupe de la même façon (n°4) que le 1er coup, on augmente à nouveau la puissance du sommet principal ; si l'on coupe maintenant le sommet principal, nous aurons + 1 face, + 4 sommets, + 5 arêtes.

Nous avons alors émis une conjecture : *lorsque l'on coupe un sommet, on ajoute autant d'arêtes que la puissance et autant de sommets, moins 1* — en raison du sommet coupé.

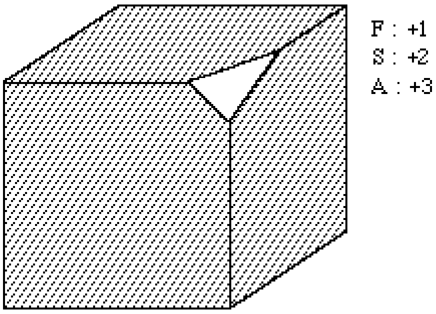
Pendant les 9 premiers coups de scie, nous allons donc rajouter à chaque coup :

1 face, 1 sommet, 2 arêtes,

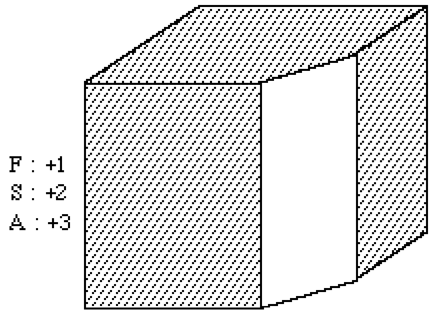
et nous allons augmenter à chaque coup la puissance de 1. La puissance étant initialement de 3, elle sera donc de 12 au bout de 9 coups de scie. Le dernier coup de scie rajoutera donc :

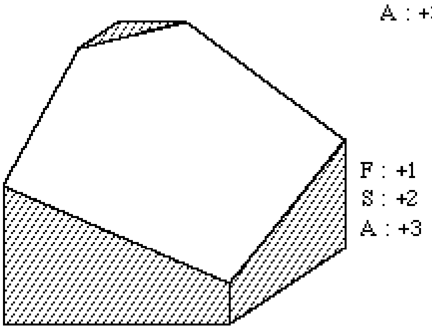
1 face, 11 sommets, 12 arêtes.

	1er coup de scie	9 1ers coups de scie	10ème coup de scie	Bilan
F	+ 1	+ 1 x 9	+ 1	+ 10
S	+ 1	+ 1 x 9	+ 11	+ 20
A	+ 2	+ 2 x 9	+ 12	+ 30



dessin 4





Le cube.

Nous remarquons que les coupes qui nous permettent d'ajouter le plus de faces, arêtes et sommets sont les cas 1, 2, 3 (dessin 4). Ces cas sont semblables à ceux du tétraèdre, mis à part ceci : les cas 4 et 5 augmentent à chaque coupe la puissance d'un sommet.

Puisque le cube a la même puissance que le tétraèdre, alors il aura les mêmes résultats (coupes et ajouts).