Ateliers de mathématiques

de Luc Trouche
professeur de mathématiques
au lycée Joffre de Montpellier

Du 6 novembre 1990 au 12 mars 1991, ont fonctionné, le mardi, des "ateliers de mathématiques", encadrés par M. Trouche. Cela s'adressait à des élèves de 1°S particulièrement motivés.

Il s'agissait, en dehors des contraintes de temps ou de programme, de prendre du temps pour réfléchir à la résolution de problèmes, pour explorer différentes méthodes d'abord d'une situation mathématique.

M. Trouche n'ayant pu se jumeler ni avec un autre établissement, ni avec un chercheur, ses ateliers de mathématiques ont donc pris une forme intermédiaire entre "MATh.en.JEANS" et le "problème ouvert".

« (…) Je ne procède peut-être pas tout à fait comme les "vrais" groupes "MATh.en.JEANS". Pas d'objectif précis de recherche pour l'année (en l'absence de mathématicien compétent c'était difficile), mais une série de jalons posés, et le plaisir pour tous de la recherche et des découvertes partagées. »

Chaque atelier faisait l'objet d'un sujet d'exercices dont voici une énumération résumée :

Atelier 1 — 6 nov 90 — enquêtes et filatures

Les quatre annexes jointes présentent des solides, des graphiques, des formules et des tableaux de nombres. Il s'agit à chaque fois, d'étudier les variations du volume de liquide contenu dans chaque récipient en fonction de la hauteur. Il s'agit de restituer à chaque récipient "sa" courbe, "sa" formule et "son" tableau. Dans l'ordre et avec les méthodes de son choix. On justifiera les résultats proposés.

Atelier 2 — 13 nov 90 — enquêtes et filatures (suite)

On achèvera le travail commencé la dernière fois, et on complètera les jauges ci-jointes.

Atelier 3 — 20 nov 90 — volumes différents, effets identiques

On dépose une bille en fer de rayon 4 cm dans un récipient cylindrique de rayon 5 cm. On remplit alors le récipient d'eau jusqu'à recouvrir très exactement la bille. Puis, on enlève la bille, et on remet une bille plus petite de rayon $r < 2$. On constate que le même phénomène se reproduit : l'eau recouvre très exactement la bille. Cela vous paraît-il possible ? Y a-t-il une seule valeur possible pour r et, si oui, quelle est-elle ? On reprend le problème avec le même cylindre, et une bille de rayon R. Peut-on toujours trouver une bille "jumelle" de rayon $r \neq R$?

Atelier 4 — 27 nov 90 — problèmes alimentaires

Trois garçons gourmands veulent se partager une tarte carrée de 30 cm de côté, qu'il s'agit donc de couper équitablement. Le plus rapide (et le plus inconséquent !) donne le premier coup de couteau comme indiqué ci-dessous. On se propose de terminer le partage en donnant deux autres coups de couteau rectilignes partant du centre de la tarte. Comment ?

Dans une pièce parallélépipédique (dimensions 4 m x 6 m, plafond de 3 m), une fourmi (gourmande aussi), partie d'un coin du plafond doit atteindre en se déplaçant sur les murs et sur le plancher une miette de pain placée au centre de la pièce. Quel est le chemin le plus court ? Quelle est alors la distance à parcourir ?

Atelier 5 — 4 déc 90 — concurrence royale

Le problème qu'il s'agit de résoudre est le suivant : déterminer toutes les manières de placer le plus grand nombre possible de reines sur l'échiquier ordinaire, formé de 64 cases, de telle sorte qu'aucune des reines ne puisse être prise par une autre ; en d'autres termes, sur les cases de l'échiquier, disposer des reines de telle façon que deux quelconques d'entre elles ne soient jamais situées sur une même ligne parallèle à l'un des bords ou à l'une des diagonales de l'échiquier.

Remarque: on pourra aussi se poser le même problème pour les fous ou les tours …

Atelier 6 — 11 déc 90 — au feu les pompiers

Deux échelles, l'une de 2 m, l'autre de 3 m, se croisent, comme indiqué sur la figure, dans un couloir, à une hauteur de 1 m. Quelle est la largeur du couloir ?

Atelier 7 — 18 déc 90 — pour finir l'année

éliminatoires individuelles des catégories HC et GP du championnat de France 1990 des jeux mathématiques et logiques.

Atelier 8 — 8 jan 91 — équations

« Ces deux dindes pèsent 20 livres à elles deux », dit le boucher. « La plus petite coûte 2 centimes de plus à la livre que la grande. » Mme Smith a payé 82 centimes pour la petite et Mme Brown 2,96 F pour la grande. Combien pesaient-elles chacune ?

« Bien le bonjour, Monsieur l'agent », dit Mr McGuire, « pouvez-vous me dire l'heure ? Mais bien sûr », répondit l'agent qui avait une réputation de mathématicien : ajoutez au quart du temps depuis minuit la moitié du temps jusqu'à minuit et vous aurez l'heure exacte.»

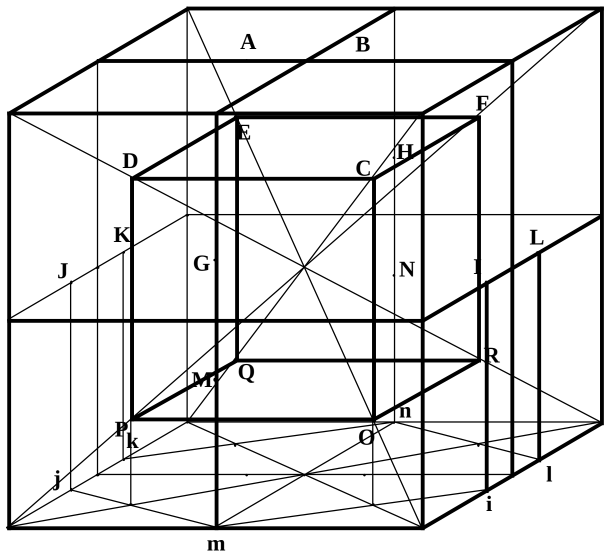
Deux ouvriers doivent exécuter un travail ; le premier en fait la moitié puis le second fait le reste. Le travail est ainsi terminé en 25 jours. Si les deux ouvriers avaient travaillé ensemble, ils auraient fini en 12 jours. Combien chacun d'eux mettrait-il pour effectuer tout le travail ?

Atelier 9 — 15 jan 91 — du pentacle

Etude directe :

Prouver que, dans un pentagone régulier ABCDE, chaque diagonale est parallèle au côté qui ne lui est pas adjacent (utiliser les symétries !). En déduire que EAFD est un parallélogramme. Comparer les rapports ED/FC et AD/BC. En posant φ = AD/BC, montrer que l'on a $\varphi = 1 + 1/\varphi$. En déduire la valeur de φ.

Suivent trois constructions du pentagone régulier et une construction du dodécaèdre régulier, inscrit dans un cube :



On place sur le dessin les 12 sommets du dodécaèdre, extrémités des 6 arêtes qui sont sur les faces du cube. L'arête AB, par exemple, de longueur c, est placée sur un axe de symétrie médian du carré supérieur, à c'/2 de chaque bord. On voit qu'il est utile de placer les milieux des 12 arêtes du cube.

Il reste à placer 8 sommets qui sont les sommets d'un cube inscrit dans le dodécaèdre, homothétique du premier ; ces sommets sont donc sur les diagonales du “grand” cube ; on procède en deux temps :

Tout d'abord, on projette I, J, K et L sur la face inférieure du cube en i, j, k et l ; on joint i et j au milieu m de l'arête avant de cette face, puis k et l au milieu n de l'arête arrière de cette face ; ces quatre segments coupent les diagonales de la face en quatre points qui sont les projetés des 8 sommets.

Il reste à tracer les diagonales du cube et les “verticales” passant par les quatre points obtenus pour déterminer les 8 sommets attendus.

En reliant convenablement les 20 points ainsi placés on obtient une perspective cavalière (30° ; 1/2) du dodécaèdre, le plan arrière choisi étant un plan parallèle au plan médiateur de l'arête IL.

Atelier 10 — 22 jan 91 — voir dans l'espace

Il s'agit de dessiner l'ombre d'un cube de 5 cm de côté, posé sur une table, éclairé par une source lumineuse accrochée à un support vertical de 15 cm de haut, dans les cas suivants (on ne s'intéressera en fait qu'à la détermination de l'ombre de la face supérieure) : 1. Le cube est posé “à plat sur la table”, le support de la lampe le traverse en son centre. 2. Le support de la lampe est contre une arête du cube. 3. Le cube toujours à plat, la lampe est posée en un point quelconque. 4. Le cube est posé “sur une pointe”.

Atelier 11 — 29 jan 91 — minimum et maximum

Déterminer le chemin le plus court de A à B en passant par les droites D et D'.

(difficile) Déterminer le point M, intérieur au triangle ABC, tel que MA + MB + MC soit minimale.

On veut clôturer un champ rectangulaire sur trois côtés, le long d'une rivière. On dispose d'une clôture de 1000 m. Quelles dimensions donner à ce champ pour disposer d'une aire maximale ?

(difficile) On veut construire une citerne cylindrique (avec un fond et un couvercle) pouvant contenir 1000 litres. Quelles dimensions choisir pour que la surface soit la plus petite possible ?

Atelier 12 — 5 fév 91 — infini

La Tour de Hanoï :

Quel est le nombre minimum de coups pour déplacer une tour de 2, puis 3, puis 4 étages ?

Vous apparaît-il possible de déplacer une tour de 64 étages ? 1991 étages ?

Dans le cas où le problème admet une solution , si on appelle P(n) le nombre minimum de coups nécessaires pour déplacer une tour de n étages, pouvez-vous calculer P(n) en fonction de P(n - 1) ? Mettez alors cette relation sous la forme P(n) - a = k [P(n-1) - a]. En déduire alors la valeur de P(n) en fonction de P(1), puis en fonction de n.

Cela fait combien de coups pour 5 étages ? Pouvez-vous écrire le programme de déplacement de la tour ?

Calculez la valeur exacte du nombre minimum de coups pour déplacer une tour de 64 étages. Combien de temps est nécessaire pour un tel déplacement, si on compte que chaque coup nécessite un temps de 1 seconde ?

Atelier 13 — 12 fév 91 — de la numération

Convertir 3457871 (base 10) en base 2, 101100111000 (base 2) en base 10, 13A56B3 (base 12) en base 10, 1000000 (base 10) en base 12.

Le jeu de Nim : ce jeu se joue à deux. On dispose d'un certain nombre d'allumettes (ou autres objets) par étage. Chaque joueur, à son tour, prend un nombre quelconque d'allumettes, mais sur un seul étage. Celui qui prend la dernière allumette a gagné. Pratiquez ce jeu à deux. Essayez de comprendre pourquoi la numération base 2 permet à un joueur averti de l'emporter sur tout joueur … innocent !

Atelier 14 — 5 mar 91 — une anomalie génétique : la courbe de Koch

Je vous propose d'étudier cette courbe pathologique de la façon suivante : on désignera par u_n, v_n, et w_n respectivement le nombre de côtés à l'état n, le périmètre à l'état n, et l'aire de la surface à l'état n (on prendra comme unité de longueur la longueur du côté du triangle équilatéral à l'état 0, et comme unité d'aire l'aire du premier triangle équilatéral).

On calculera les premiers termes de la suite, puis on recherchera une formule de récurrence, et la valeur de u_n, v_n, et w_n en fonction de n, et on verra ce que tout cela devient quand n tend vers l'infini.

Enfin pouvez-vous trouver des équivalents à trois dimensions du flocon de neige et de ses cousins ? Si, par exemple, des tétraèdres sont construits sur les faces d'un tétraèdre, la construction limite aura-t-elle une surface infinie ? Délimitera-t-elle un volume fini ?

Atelier 15 — 12 mar 91 — constructions géométriques, méthodes et recettes

S'agissant de problèmes de constructions de figures géométriques vérifiant un certain nombre de contraintes, on se propose de tester une méthode qui consiste à …

… abandonner la contrainte (i)

… rechercher l'ensemble des figures qui vérifient les n - 1 contraintes restantes

… sélectionner parmi celles-ci la ou les figures qui vérifient la contrainte (i)

… en déduire une méthode de construction.

Construire les cercles tangents à deux droites parallèles, et passant par un point, donnés. [laisser tomber la contrainte du point].

Construire les cercles tangents à deux droites sécantes, et passant par un point, donnés.

Construire les cercles passant par deux points, et tangents à une droite, donnés.

Construire un carré IJKL inscrit dans un triangle donné ABC [I et J sur (AB), K sur (BC), L sur CA].

Construire un carré ABCD inscrit dans un demi-cercle [A et B sur le diamètre, C et D sur le demi-cercle].

Construire un carré ABCD inscrit dans un secteur angulaire [A sur le rayon [OA], B sur le rayon [OB], Cet D sur l'arc AB].

Construire un triangle ABC connaissant la mesure des longueurs des trois médianes : AA' = 9, BB' = 12, CC' = 15.

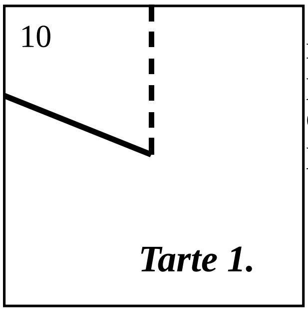
Sources utilisées par Luc Trouche et fournies aux élèves en annexes aux sujets : (entre autres)
— travaux du groupe “Géométrie” de l'IREM de Montpellier ;
— “Récréations mathématiques” de E. Lucas ;
— “Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd”, par Martin Gardner.

EXEMPLE DE SOLUTION REDIGEE PAR UN DES GROUPES D'ELEVES DE MONTPELLIER.

Atelier 4 — problèmes alimentaires

Trois garçons gourmands veulent se partager une tarte carrée de 30 cm de côté, qu'il s'agit donc de couper équitablement. Le plus rapide (et le plus inconséquent !) donne le premier coup de couteau comme indiqué ci-dessous. On se propose de terminer le partage en donnant deux autres coups de couteau rectilignes partant du centre de la tarte. Comment ?

Résolution. Chacune des tartes a une aire de 900 cm^2. Chacun des garçons devra recevoir une part de 300 cm^2.



Tarte 1.

On calcule l'aire du morceau délimité par le premier coup de couteau et le trait inscrit en pointillé sur le schéma.

$$\frac{(10 + 15) \times 15}{2} = \frac{375}{2}$$

On retranche cette aire à 300, pour connaître l'aire manquant à la première part :

$$300 - \frac{375}{2} = \frac{600 - 375}{2} = \frac{225}{2}$$

On calcule alors le nombre de centimètres du bord haut droit à partir duquel on devra donner le coup de couteau :

$$\frac{(x + 15) \times 15}{2} = \frac{225}{2}$$

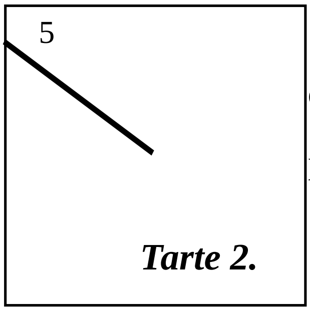
$$\frac{225}{15} = x + 15$$

$$15 = x + 15$$

$$x = 0$$

On devra donner le coup de couteau du centre de la tarte jusqu'au coin supérieur droit.

Pour des raisons de symétrie par rapport à la droite qui porte le deuxième coup de couteau, le troisième coup doit être donné à 10 cm à gauche du côté inférieur bas.



Tarte 2.

On traite le problème de la même façon.

Aire de la première partie :

$$\frac{(5 + 15) \times 15}{2} = 150$$

On retranche à l'aire de la part : 300 - 150 = 150. On cherche où on doit donner le deuxième coup de couteau :

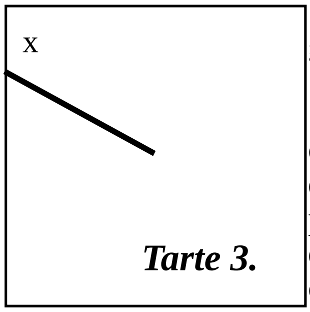
$$\frac{(x + 15) \times 15}{2} = 150$$

$$x + 15 = \frac{300}{15}$$

$$x + 15 = 20$$

$$x = 5$$

On donnera donc le deuxième coup de couteau à 5 cm au dessous du coin supérieur droit. Pour des raisons de symétrie, le troisième coup de couteau se fera à la verticale sous le centre de la tarte.



Tarte 3.

C'est la méthode générale :

si X est le nombre de centimètres au dessous du côté supérieur droit à partir desquels on doit donner le coup de couteau, on a :

$$\frac{(X + 15) \times 15}{2} = 300 - \frac{(x + 15) \times 15}{2}$$

$$(X + 15) \times 15 = 600 - (x + 5) \times 15$$

$$15 X + 225 = 600 - 15 x - 225$$

$$15 X = 150 - 15 x$$

$$X = 10 - x$$

Si on trouve X négatif (si x est supérieur à 10), alors le coup de couteau se fera à $|X|$ centimètres à gauche du coin supérieur droit, ce qui nous ramène ensuite à une situation normale.

On détermine ensuite le troisième coup de couteau à partir du second.