Distance p-adique : une distance qui n'est pas habituelle.

par Mathieu Leguay et Joseph Henri, élèves de TC du Lycée Georges Braque d'Argenteuil

enseignantes : Mmes Joëlle Richard et Christine Rouaud

chercheur : Mme Catherine Goldstein, mathématicienne, Université Paris XI, Orsay.

Suivant la distance qu'on utilise : distance usuelle ou distances ultramétriques, l'idée qu'on se fait des figures géométriques peut varier. Dans l'univers de la géométrie ultamétrique, une des règles de la distance usuelle est modifiée de façon plus contraignante. Dans ce cas, le triangle équilatéral auquel nous sommes habitués aura-t-il la même physionomie ?

Intéressons-nous ici à une distance ultramétrique particulière : la distance p-adique.

Calcul de la distance p-adique.

Pour la distance usuelle, la distance de 252 à 2 est 250. Voilà comment mesurer la distance 5-adique de 252 à 2 que l'on notera $d_5(252,2)$:

On effectue $|252 - 2| = 250$, on décompose 250 en produit de facteurs premiers : $250=5^3.2$. La distance cherchée est l'inverse de la plus grande puissance de 5 de cette décomposition : $d_5(252,2) = 1/5^3$.

La distance 3-adique de 252 à 2 est 1. En effet, on peut écrire $250=5^3.2.3^0$ et donc $d_3(252,2) = 1/3^0 = 1$.

Axiomes de la distance p-adique.

La distance p-adique (p nombre premier) est caractérisée par les trois axiomes caractérisant la distance ultramétrique et par le mode de calcul de distance énoncé ci-dessus. Ces trois axiomes sont :

Loi de Rémi 1

Si je multiplie 9, 90, 900, 9 000, 90 000, 900 000, … par n'importe quel nombre, la somme des chiffres du résultat fait 9 ou un nombre de la table de 9.

— **1^er^ axiome** : La distance de A à B est nulle si et seulement si A = B
— **2ème axiome** : La distance de A à B est égale à la distance de B à A.
— **3ème axiome** : Soient trois points A, B et C, la distance de A à B est égale à la distance de A à C si et seulement si la distance de A à C est supérieure à la distance de B à C. De même la distance de A à B est inférieure ou égale à la distance de A à C si et seulement si cette distance est égale à la distance de B à C.
De la lecture de ce 3ème axiome, nous déduisons que ***tous les triangles ont, au moins, deux côtés égaux***. Nous avons cherché la forme des triangles équilatéraux.

Triangles équilatéraux

Recherche de la forme générale de 3 nombres positifs entiers équidistants.

La distance p-adique est notée $d_p(x,y)$.

— **cas où un des trois nombres est 0** : soit 0, x, y ces trois nombres tels que

$$d_p(x,0) = d_p(x, 0) = d_p(x, y) = 1/p^n.$$

Calculons $d_p(x, 0)$:
$|x - 0| = p^n.a = x$, où a n'est pas multiple de p.

Calculons $d_p(y, 0)$:
$|y - 0| = p^n.b = y$, où b n'est pas multiple de p.

Calculons $d_p(x, y)$:
$|x - y| = p^n.c = x - y$, si $a \geq b$.
Or $x - y = a.p^n - b.p^n = (a - b).p^n = c.p^n$ donc $c = a - b$. Ces trois nombres équidistants ont pour forme générale :

$x = a.p^n$
$y = b.p^n$
0 où a, b et (a-b) sont des entiers non multiples de p.

— cas où un des 3 nombres positifs est k, où $k \in \mathbb{N}$. De la même manière, on obtient alors que les trois nombres équidistants entiers positifs sont de la forme :

$x = a.p^n + k$
$y = b.p^n + k$
k

où k est un entier, n aussi, p premier, $a \neq b$ et surtout a, b et a-b sont des entiers non multiples de p.

Une conséquence : si on se donne deux entiers, il existe une infinité de nombres formant avec les deux autres un triangle équilatéral. Alors qu'avec la distance usuelle, il n'y en a que deux!

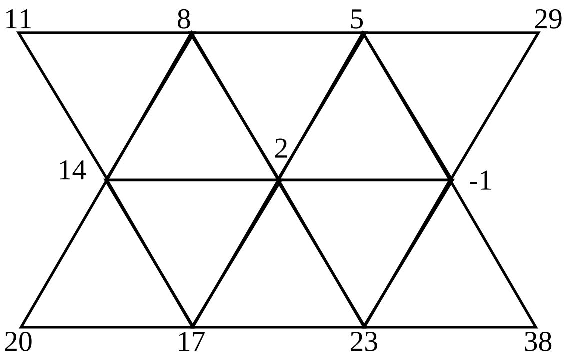
Voici un exemple : *quels sont les nombres équidistants de 2 et 8 en 3-adique ?*

On trouve $d_3(2, 8)=1/3$. Si on prend k = 2 alors $8 = b.3^1 + 2$. Donc b=2 et le nombre cherché est $x = a.3^1 + 2$. Il suffit alors de choisir a tel que que a et (a - b) ne soient pas multiples de p et a > b. On obtient $a \neq 3n$ et $a - b \neq 3n$ soit $a = 3n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Donc $x = (3n + 1).3 + 2 = 9n + 5$.

Il existe donc une infinité de solutions.

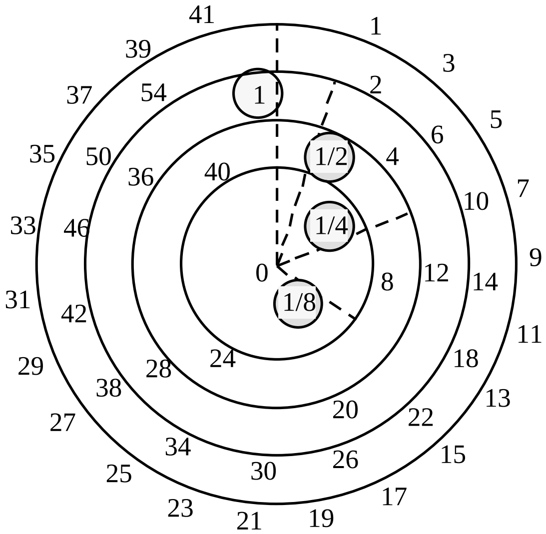
Illustration : un des multiples exemples de triangles équilatéraux en 3-adique et de côté 1/3.



Cette représentation ne permet pas de visualiser tous les nombres équidistants de 2 et 8 en 3-adique. Nous nous sommes donc intéressés à la façon de classer les nombres et les distances p-adiques qui les séparaient en construisant des graphes.

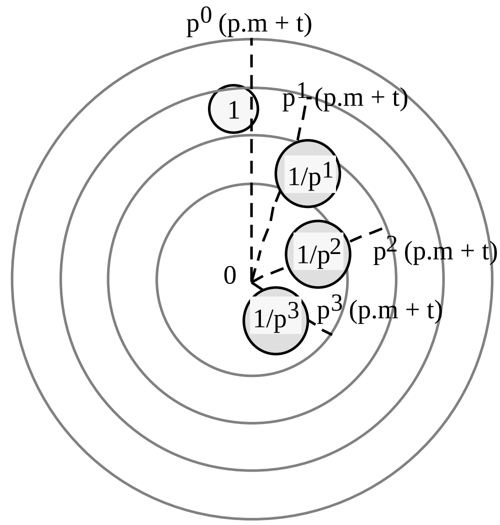
Différents graphes.

Un exemple en 2-adique :



Voici des cercles concentriques ; sur chacun sont situés des entiers équidistants de 0. Nous en avons déduit la forme générale des entiers d'un même cercle. Dans le sens des rayons décroissants, à partir du cercle de rayon 1, les formes générales des nombres sont $(2n+1).2^0$, $(2n+1).2^1$, $(2n+1).2^2$, … , $(2n+1).2^n$.

Généralisation.



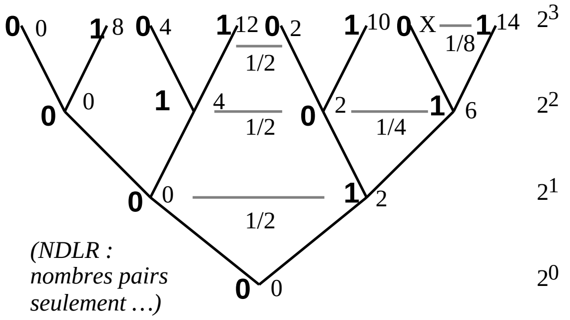
De cette figure en 2-adique, nous avons généralisé afin de passer en p-adique. Par une démonstration, on a trouvé la forme générale des entiers d'un même cercle dans une base p quelconque. Cette forme est : $p^n.(p.m + t)$ où p est la base choisie, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$ et $t \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. p^n représente l'inverse de la distance séparant ces nombres de 0.

L'application de la formule est faite sur la figure de la page 34, en bas à droite, en p-adique. On peut trouver la forme générale de tous les nombres équidistants de 0 à partir d'un nombre x sachant que $d_p(x,0)=1/p^n$.

— Prenons un exemple : pour x=150 en 5-adique, $d_5(150, 0) = 1/5^2$. La forme générale des nombres situés à $1/5^2$ de 0 est $5^2(5m + t)$ où $t \in \{1, 2, 3, 4\}$.
En faisant varier m de 0 à $+\infty$, les nombres de ce cercle appartiennent à l'ensemble {25, 50, 75, 100, 150, …}.

— *Petit test de compréhension* : trouver les trois plus petits nombres positifs du cercle de centre 0 et contenant le nombre 150 en 3-adique.

ARBRES
Calcul d'entier sur un arbre particulier



Pour calculer le nombre x sur cet arbre en 2-adique, il suffit de prendre la série de nombres binaires lui correspondant : 0110. Il faut alors additionner ces nombres aux puissances de 2 respectives de la façon suivante :

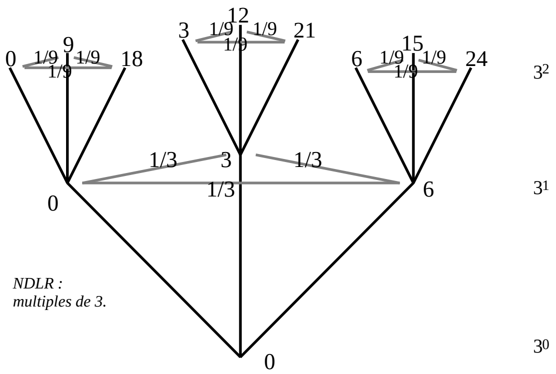
$$x = 0x2^0 + 1x2^1 + 1x2^2 + 0x2^3 = 6.$$

On peut alors remarquer d'intéressantes particularités sur cet arbre. En effet, tous les nombres issus de la 1ère branche de gauche sont à une distance 2-adique égale à 1/2 de tous les nombres issus de la première branche de droite. Plus généralement, tous les nombres d'une branche issue d'un point sont à égale distance 2-adique des nombres de l'autre branche issue de ce point.

Réponse au test de compréhension :
$d_3(0, x) = 1/3$ donc la forme générale est $3.(3m + t)$ avec $t \in \{1, 2\}$.
Les trois plus petits nombres sont :
pour m = 0 : 3, 6 ;
pour m = 1 : 12.
La réponse est donc $x \in \{3, 6, 12\}$.

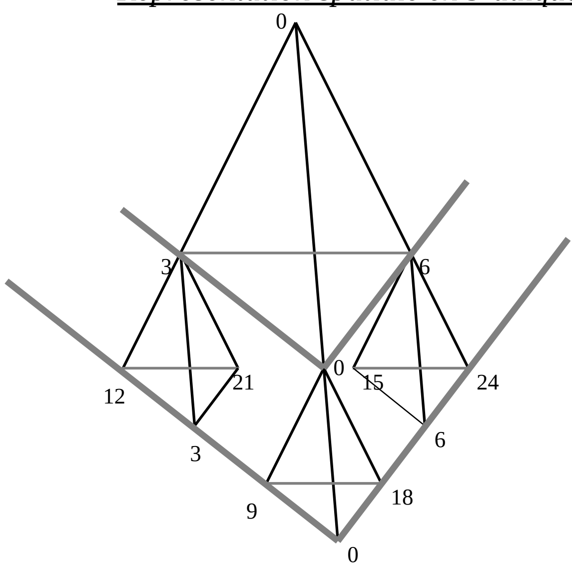
Loi de Jamal 2

Si N est n'importe quel nombre, N - N = 0.



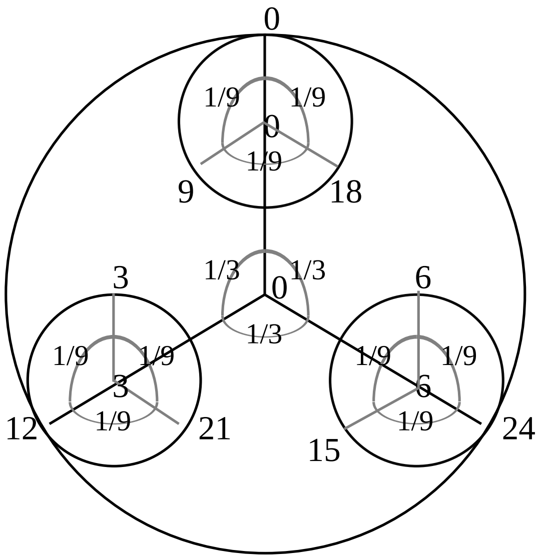
Mais sur l'arbre ci-dessus en 3-adique, elles sont beaucoup moins visibles car il existe 3 axes de symétrie. Nous avons alors eu l'idée de construire d'autres figures sur lesquelles les symétries seraient très visibles quelle que soit la base p choisie.

Représentation spatiale en 3-adique.



Page suivante, la projection orthogonale de cette représentation spatiale sur un des plans dessinés en gras.

Projection de la représentation spatiale en 3-adique.



Si ce sujet vous a passionné, voilà d'autres pistes que nous n'avons pas explorées :

— Nous connaissons l'existence d'applications dans la classification des espèces. Existent-elles en génétique ?

— Qu'est-ce qu'un nombre p-adique ? Comment les construit-on ? Est-ce que l'ensemble de ces nombres forme un corps comme les nombres réels ?

— Peut-on représenter en géométrie p-adique les configurations usuelles : un cercle, une parabole, un carré … ?

NDLR : les élèves du lycée Racine ayant abandonné leur participation à “MATh.en.JEANS” en cours d'année, ceux de Georges Braque se sont retrouvés sans correspondants (dommage …). Des mathématiciens du LSD2 se sont proposés pour jouer un rôle de correspondants, et ont donc “planché” sur les sujets. Ils ont envoyé par fax les résultats de leurs cogitations, mais trop tard pour les élèves de Braque, dont le travail était déjà avancé. A titre de pistes de recherches envisageables pour les lecteurs de cette brochure, nous vous proposons ce travail du LSD2 de Grenoble.

Nombres p-adiques
sueqida-p serbmoN

Nous avons travaillé en nous inspirant d'un vague souvenir de lecture et de phrases de Catherine Goldstein sur ces nombres.

Pour nous les nombres 10-adiques (à base 10) sont des nombres “infinis” qu'on peut ajouter grâce au système décimal ; ce sont des suites de chiffres écrites à l'envers :

…28951413 (les chiffres sont quelconques)
…33333314 qu'on écrit $\underline{3}14$
…010101779 qu'on écrit $\underline{01}779$

nous les appellerons les “xid”.

Résultats : L'addition et la multiplication ordinaires (calculées de proche en proche, de droite à gauche) marchent. Les entiers ordinaires (naturels) sont aussi des 10-adiques (= ceux de la forme : $\underline{0}$ENTIER). La soustraction marche aussi. Mais on n'arrive pas à les ordonner. De plus, les écritures de a - b et de b - a ne sont pas semblables. Chaque xid a un opposé :

- (…28951413) = …71048587.

(Vérifiez vous-même que la somme est $\underline{0}$.) Mais l'opposé d'un entier n'est pas entier !!

Divisions : 1/2 n'existe pas, 1/5 ou 1/10 non plus. L'équation 2x = a a une solution en x si et seulement si a commence (à droite) par un chiffre pair. Pour diviser un xid “pair” par 2 on le coupe en tranches, chaque tranche se lisant, de gauche à droite comme un entier pair et on divise chaque tranche par 2 (en ajoutant éventuellement un 0 à gauche pour garder la même longueur).

3, 7 et sans doute tous les entiers non multiples de 2 ou 5 ont des inverses :

1/3 = $\underline{6}7$ 8/3 = $\underline{3}6$ 1/7 = $\underline{14}3$
3/7 = $\underline{875142}9$ (même période que dans le développement décimal) 6/7 = $\underline{58}$.

On vérifie bien que 1/3 + 8/3 = 3 et que 1/7 + 6/7 = 1. Il faudra que l'on continue à étudier les périodes et les xid périodiques : ils doivent représenter toujours des fractions.

Autre problème : √2 est-il un xid ? (plutôt oui). Peut-on définir un xid qui représente π ? (non ?). L'image miroir d'un xid définit la partie décimale d'un réel. Peut-on s'en servir ? (attention aux écritures équivalentes).

* Les xids forment apparemment un anneau intègre commutatif. Le quotient par l'idéal (maximal ?) engendré par 2 et 5 devrait donner un corps. On ne connaissait pas. C'est passionnant !

13 décembre 1991, Pierre Duchet et Frédéric Maffray, du LSD2 de Grenoble.