Maths et musique

par Nathalie Chenot, Stéphane Henry, Sylvain Petitjean, Aurélia Peyrenegre, Henri Torgemane des lycées Alfred Kastler de Cergy-Pontoise et Fragonard de l'Isle-Adam

enseignantes : Mme Annick Boisseau, Anne Kérharo et Annie Soismier

chercheur : Mme Michèle Vergne, Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Ecole Normale Supérieure.

Le but de notre atelier a été de chercher à comprendre l'origine et la formation de différentes gammes musicales.

Généralités valables pour la majorité des gammes occidentales :

Notes de la gamme

Les notes utilisées par les musiciens se groupent en octave de 7 + 1 notes chacune. Les noms des notes, en France, sont : do ré mi fa sol la si (do). C'est Guido d'Arezzo (≈1000-≈1050) qui en est à l'origine, par son hymne "Ut queant laxis" où les premières notes de chaque vers étaient dans l'ordre naturel de la gamme :

UT que-ant la-xis
RE-so-na-re fi-bris
MI-ra ges-to-rum
FA-mu-li tu-o-rum
SOL-ve pol-lu-ti
LA-bi-i re-a-tum
Sanc-te **I**o-han-nes

(Do a remplacé UT au $17^{ème}$ siècle)

On envisage généralement 10 octaves, l'ensemble de ces octaves formant l'échelle musicale. Chaque note d'une gamme donnée est caractérisée par sa fréquence N en Hertz.
Ex : La_3 440 Hz (pour les trois gammes)

Les valeurs numériques des fréquences des autres notes sont toutes calculées à partir de cette note.

<u>Loi de Antoine 6</u>

Quand on compte de 10 en 10, les unités ne changent pas, ce sont les chiffres à gauche qui changent.

Lorsque l'on passe d'un note à une autre note de même nom située à l'octave supérieure, sa fréquence est doublée. Ex : do_1 65,4 Hz do_2 130,8 Hz (pour la gamme tempérée)

Chaque note d'une gamme peut être altérée:
— par un dièse # (ou un double dièse ## ou X), qui augmente la fréquence de la note
— par un bémol *b* (ou *bb*), qui diminue la fréquence de la note.

I.— Les intervalles.

En raison de sa structure, l'oreille perçoit le rapport de fréquences de 2 notes. L'intervalle qui existe entre deux notes est déterminé par le rapport de fréquences de ces notes.

Les principaux intervalles sont la quarte, la quinte et l'octave. Ces intervalles répondent au principe d'harmonie.

le principe d'harmonie

Soit un son pur, de fréquence f. On peut déduire d'autres sons purs dont la fréquence est dans un rapport simple avec la fréquence initiale. On a donc 2f, 3f, 4f, mais aussi f÷2, f÷3 puis 2f÷3, 4f÷3, 3f÷2, etc…

On a par exemple :

2f ou f÷2 pour une octave ascendante ou descendante,
3f pour une octave plus une quinte,
3f÷2 pour une quinte descendante,
4f÷3 pour une quarte.

Le principe d'harmonie est plus faiblement audible pour les rapports 5 et 7.

Ces rapports se retrouvent sur des cordes de guitare ou de violon :

La longueur de la corde et la fréquence de la note jouée sont liées suivant la formule : fréquence = C / Longueur C est une constante qui dépend de la tension de la corde, et de la masse en fonction de la longueur.

D'après cette formule, pour que la fréquence soit multipliée par 3/2 (quinte descendante), il faut multiplier la longueur de la corde par l'inverse du rapport : 2/3

II.— La justesse absolue.

Ce qui donne une impression de justesse à l'oreille, n'est pas la hauteur d'une note isolée. C'est au contraire le rapport de fréquences entre plusieurs notes.

Malheureusement, seuls les instruments qui créent leurs notes, tels le violon, ou le trombone à coulisse, peuvent tenter d'atteindre la justesse absolue. Les instruments à sons fixes, tels la guitare, la flute ou le piano, en sont incapables.

Si l'on vise la justesse absolue, la note appelée do_1 pourra avoir une fréquence différente selon sa position dans le morceau.

Exemple:

On part d'une note do_1 … 65,4 Hz. (fréquence de départ choisie arbitrairement)
On monte d'une tierce de rapport 5/4 : on arrive à la note mi_1 … 81,75 Hz
On monte d'une autre tierce de même rapport : on a sol_1 … 102,19 Hz
On redescend alors d'une quinte de rapport 2/3 : on obtient do_1 … 68,12 Hz
Dans les gammes conventionnelles, monter de deux tierces ou d'une quinte est équivalent. C'est pour cette raison que d'autres systèmes musicaux ont été inventés, de manière à pouvoir les utiliser sur des instruments à sons fixes, tout en cherchant à obtenir la meilleure approximation possible de la justesse absolue.

III.— Les différentes gammes

1.— La gamme de Pythagore

Cette gamme est basée sur les intervalles d'octaves et de quintes. Voici sa technique de formation :
— On part d'une note initiale
— On monte d'une quinte (fréquence x 3/2), en restant dans la même octave (fréquence x 1/2) si nécessaire.
— On continue à monter d'une quinte jusqu'à ce que l'on arrive au voisinage de la note initiale.
Ainsi, après 5, 7, 12, 41, ou 53 quintes successives, on arrive à une note proche de la note initiale. Les pythagoriciens s'étaient arrêtés à 7 quintes. La gamme a ensuite été prolongée à 12 quintes, de façon à obtenir les altérations.

La gamme pentatonique (gamme “chinoise”) est, et a été, très répandue dans le monde, du Pérou au Congo, en passant par les pays eskimos et l'Ecosse. Elle est basée sur ce même système, en s'arrêtant à cinq quintes.

Le système de Holder, basé sur un cycle de 53 quintes, ne contient en fait que douze notes. Ici, chaque ton est divisé en 9 commas. Un demi-ton diatonique vaut 4 commas. Un demi-ton chromatique vaut 5 commas. On voit souvent cette gamme nommée comme celle de la justesse absolue, ce qui est faux. De même on retrouve dans quelques ouvrages de théorie musicale, des commas de Holder mélangés dans le système tempéré, ce qui est encore faux.

LE CERCLE DES QUINTES :
voir documents page suivante.

Hypothèse de départ :
fréquence = 440 x $2^{(\text{octave }(9\text{-note})/12)}$, où …
octave 0 = celle qui contient le LA international. Les octaves plus aigües perdent 1 unité par octave (ex : l'octave supérieure à celle du LA international est l'octave -1). Et les octaves plus graves gagnent 1 unité par octave (ex : l'octave inférieure à celle du LA international est l'octave 1).

9 est la valeur qui correspond au LA international. Chaque note a une valeur quelque soit son octave :

do	0 - 8
do#	1 - 8
ré	2 - 7
mi*b*	3 - 6
mi	4 - 5
fa	5 - 4
fa#	6 - 3
sol	7 - 2
sol#	8 - 1
la	9 - 0
si*b*	10 - 1
si	11 - 2
do	12 - 3

Donc **note** est la valeur qui correspond à la note. De la formule

fréquence = 440 x $2^{(\text{octave } (9\text{-note})/12)}$,

on peut dire :

octave + (9-note)/12 = $\log_2$ (f/440).

Et on en déduit :

note = 9 - [$\log_2$ (f/440)x12] mod 12

et octave = E[$\log_2$ (f/440)]

définitions utiles :

1. $\log_2 (f/440)$?

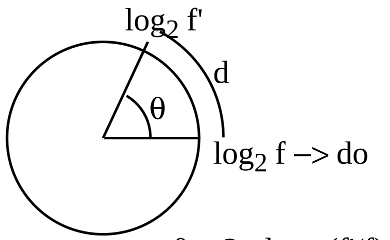
$3^2 = 9$ donc $\log_2 (9) = 3$

2. $\log_n (x) = (\log x)/(\log n)$

3. mod 12 (modulo 12) : c'est le reste d'une division par 12. ex : 119 = 11 mod 12

4. E(x) = la partie entière de x. ex : E(π) = 3.

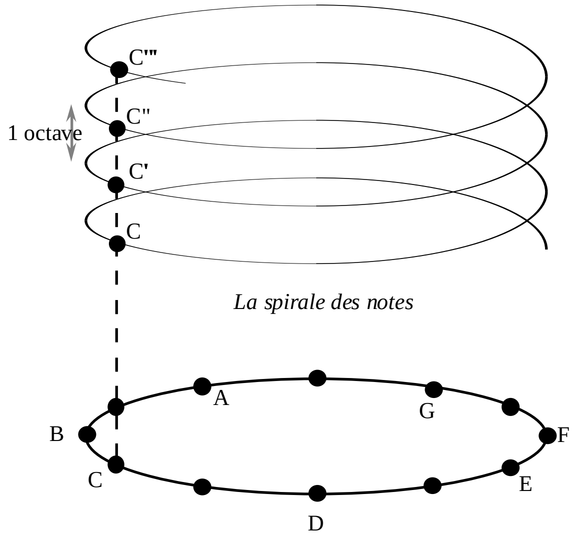
Le cercle des quintes :



$\theta = 2\pi \log_2 (f'/f)$

Loi de Géraldine 1

Pour enlever 9 à un nombre, on peut faire :
J'ajoute 1 et j'enlève 10.
ex : 37 - 9 = 37 + 1 - 10



La spirale des notes

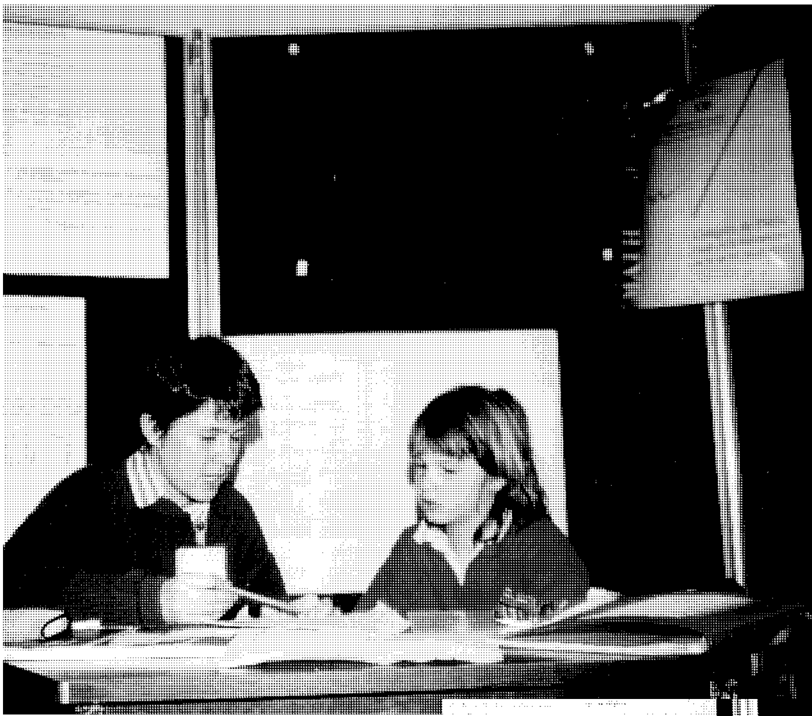
2.— La gamme de Zarlino

Cette gamme est en fait une modification de la gamme de Pythagore à sept notes. Elle a été construite principalement par le vénitien Gioseffo Zarlino (1558). A cette époque, l'accord parfait majeur (APM) avait une place importante dans la musique occidentale. L'APM est l'ensemble des notes de fréquences {f, 5f/4, 3f/2} (exemple : do, mi, sol)

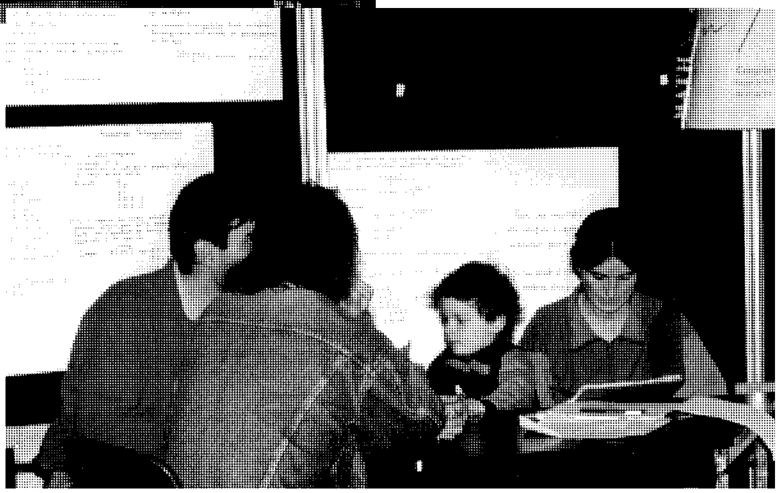
Il n'y a que trois positions possibles pour l'APM dans la gamme à sept notes, qui sont :
— Do Mi Sol
— Fa La Do
— Sol Si Ré

L'inconvénient de la gamme de Pythagore est qu'elle sonne remarquablement mal avec des accords de tierce majeur, tels Do-Mi, ou Fa-La. Dans la gamme de Zarlino, les trois notes qui faisaient mal sonner les tierces majeures sont modifiées : les rapports Do-Mi, Fa-La, et Sol-Si sont ajustés exactement à la tierce majeure.

Les écoliers de Draguignan en plein travail.



© Eric Forzy



cliché Chantal Rousselin © Palais de la découverte.