La somme des n premières racines.

par Ivan Debouzy, Jérôme Dal, élèves de TC du
Lycée Pablo Neruda de Saint Martin d'Hères

enseignants : MM. Laurent Delgado et Jean-Claude Oriol

chercheur : M. Charles Payan, Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique de Grenoble.

[NDLR : Sujet initial du groupe : Points, droites, cercles, figures … étonnant, non ?]

Nous avons cherché un encadrement de la somme S_n des n premières racines :

$$S_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$$

Nous avons obtenu :

$$\boxed{\frac{n}{3}\sqrt{4n+5} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \leq \frac{n}{3}\sqrt{4n+6}}$$

Nous avons écrit un programme informatique pour calculer S_n . A l'aide du tableau des valeurs de S_n ainsi obtenu (voir page suivante), nous avons cherché à partir de quelle valeur de n la somme des n premières racines était minorée par k× n, pour k = 1, 2, 3, … .

A partir de	$n_1 =$ 1	on a	$S_n \geq n$
"	$n_2 =$ 8	"	$S_n \geq 2n$
"	$n_3 =$ 19	"	$S_n \geq 3n$
"	$n_4 =$ 35	"	$S_n \geq 4n$
"	$n_5 =$ 55	"	$S_n \geq 5n$
"	$n_6 =$ 80	"	$S_n \geq 6n$
"	$n_7 =$109	"	$S_n \geq 7n$
"	$n_8 =$143	"	$S_n \geq 8n$
"	$n_9 =$181	"	$S_n \geq 9n$
"	$n_{10} =$224	"	$S_n \geq 10n$

On passe de n_1 à n_3 en ajoutant 18, de n_3 à n_5 en ajoutant 2×18, de n_5 à n_7 en ajoutant 3×18, de n_7 à n_9 en ajoutant 4×18. [NDLR : On fait donc l'hypothèse suivante :] la sous-suite (n_k) de rang impair s'exprime par :

$$n_k = 1 + 1\times 18 + 2\times 18 + \cdots + \left(\frac{k-1}{2}\right)\times 18$$

ou $$n_k = 1 + \frac{k-1}{2}\left(\frac{18+(k-1)\times 9}{2}\right)$$

soit, après simplification : $n_k = 1 + \frac{9}{4}(k^2 - 1)$

On exprime k en fonction de n_k :

On obtient : $k = \frac{1}{3}\sqrt{4n_k + 5}$

On démontre par récurrence que l'inégalité

$$(1) \quad S_n \geq \frac{n}{3}\sqrt{4n+5}$$

est vraie pour tout n≠0.

1°/$S_1 = 1 \geq \frac{1}{3}\sqrt{9}$ (= 1)

2°/$S_{n+1} = S_n + \sqrt{n+1} \geq \frac{n}{3}\sqrt{4n+5} + \sqrt{n+1}$

donc si on montre que

$\frac{n}{3}\sqrt{4n+5} + \sqrt{n+1} \geq \frac{n+1}{3}\sqrt{4(n+1)+5}$

alors $S_{n+1} \geq \frac{n+1}{3}\sqrt{4(n+1)+5}$.

Après calculs :

$\frac{n}{3}\sqrt{4n+5} + \sqrt{n+1} \geq \frac{n+1}{3}\sqrt{4n+9}$

$\Leftrightarrow$ $-12\sqrt{n+1} + 5\sqrt{4n+5} + \sqrt{4n+9} \geq 0$

Si $-12\sqrt{n+1} + 5\sqrt{4n+5} + \sqrt{4n+5} \geq 0$

alors $-12\sqrt{n+1} + 5\sqrt{4n+5} + \sqrt{4n+9} \geq 0$.

<u>Loi de Antoine 7</u>

Si X et Y sont deux nombres différents de 0 et si Y > X

$$\frac{X}{Y} + \frac{(Y-X)}{Y} = \frac{Y}{Y} = 1$$

Or $- 12\sqrt{n + 1} + 5\sqrt{4 n + 5} + \sqrt{4 n + 5} \geq 0$

$\Leftrightarrow 6\sqrt{4 n + 5} \ \geq\ 12\sqrt{n + 1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4 n + 5} \ \geq\ \sqrt{4n + 4}$. C.Q.F.D.

On compare S_n à une valeur légèrement supérieure à la première borne : (choix arbiraire). [NDLR : démonstration non fournie ici, mais juste.]

(2) $S_n \leq \frac{n}{3}\sqrt{4 n + 6}$

Exemple prouvant la très grande précision de l'encadrement :

$S_{100\,000} \approx 21\,082\,008{,}4$

$\frac{100\,000}{3}\sqrt{4 \times 100\,000 + 5} \approx 21\,081\,982{,}83$

soit une différence de≈ 26 ou encore une précision de $1{,}3\ 10^{-4}\%$

$\frac{100\,000}{3}\sqrt{4 \times 100\,000 + 6} \approx 21\,082\,009{,}18$: précision $< 10^{-7}\%$

ANNEXE : Table des valeurs de la somme des racines des n premiers entiers (programme en Basic sur PC).

n :	S_n	S_{n+1}	S_{n+2}	S_{n+3}	S_{n+4}	S_{n+5}	S_{n+6}
1 :	**1,000**	2,414	4,146	6,146	8,382	10,832	13,478
8 :	16,306	19,306	22,468	25,785	29,249	32,855	36,596
15 :	40,469	44,469	48,592	52,835	**57,194**	61,666	66,249
22 :	70,939	75,735	80,634	85,634	90,733	95,929	101,220
29 :	106,606	112,083	117,651	123,307	129,052	134,883	140,799
36 :	146,799	152,882	159,046	165,291	171,616	178,019	184,500
43 :	191,057	197,690	204,399	211,181	218,037	224,965	231,965
50 :	239,036	246,177	253,388	260,668	268,017	**275.433**	282,916
57 :	290,466	298,082	305,763	313,509	321,319	329,193	337,131
64 :	345,131	353,193	361,317	369,502	377,749	386,055	394,422
71 :	402,848	411,333	419,877	428,479	437,140	445,858	454,633
78 :	463,464	472,352	481,297	490,297	499,352	508,463	517,628
85 :	526,847	536,121	545,448	554,829	564,263	573,750	583,289
92 :	592,881	602,525	612,220	621,967	631,765	641,614	651,513
99 :	661,463	671,463	681,513	691,612	701,761	711,959	722,206
106 :	732,502	742,846	753,238	**763,679**	774,167	784,702	795,285
113 :	805,915	816,593	827,316	838,087	848,903	859,766	870,675
120 :	881,629	892,629	903,675	914,765	925,901	937,081	948,306
127 :	959,575	970,889	982,247	993,649	1005,094	1016,583	1028,116
134 :	1039,692	1051,311	1062,973	1074,677	1086,425	1098,214	1110,047
141 :	1121,921	1133,837	1145,796	1157,796	1169,837	1181,920	1194,045
148 :	1206,210	1218,417	1230,664	1242,952	1255,281	1267,650	1280,060
155 :	1292,510	1305,000	1317,530	1330,100	1342,709	1355,358	1368,047
162 :	1380,775	1393,542	1406,348	1419,194	1432,078	1445,001	1457,962
169 :	1470,962	1484,000	1497,077	1510,192	1523,345	1536,536	1549,765
176 :	1563,031	1576,335	1589,677	1603,056	1616,472	**1629,926**	1643,417
183 :	1656,944	1670,509	1684,111	1697,749	1711,424	1725,135	1738,883
190 :	1752,667	1766,487	1780,343	1794,236	1808,164	1822,128	1836,128
197 :	1850,164	1864,235	1878,342	1892,484	1906,662	1920,874	1935,122
204 :	1949,405	1963,723	1978,076	1992,463	2006,885	2021,342	2035,833
…	…	…	…	…	…	…	…
407 :	5483,825	5504,024	5524,248	5544,497	5564,770	5585,067	5605,390
414 :	5625,737	5646,108	5666,505	5686,925	5707,370	5727,840	5748,334
421 :	5768,852	5789,394	5809,961	5830,553	5851,168	5871,808	5892,472
428 :	5913,160	5933,872	5954,609	5975,369	5996,154	6016,963	6037,795
435 :	6058,652	6079,533	6100,437	6121,366	6142,318	6163,294	6184,294
442 :	6205,318	6226,365	6247,437	6268,532	6289,651	6310,793	6331,959