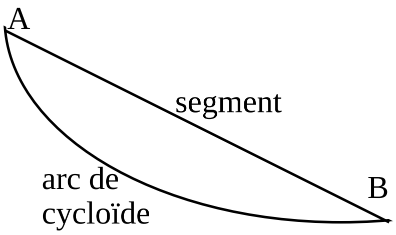
Brachistochrone : le chemin le plus *court* est-il toujours le plus *rapide* ?

par Lydie, Marie, Olivier, Idrissa, Sipha
du
Collège Victor Hugo de Noisy le Grand

enseignants : Mme Brunstein et M. Pierre Lévy.

chercheur : M. Jean-Michel Kantor, mathématicien, Jussieu.



Imaginez une bille roulant d'un point A à un point B (l'altitude du point B est inférieure à celle du point A). Le chemin le plus court est évidemment le segment [AB] ; cependant, l'expérience nous montre que ce n'est pas le chemin le plus rapide. Si la boule se déplace de A à B le long d'un arc de cycloïde elle ira toujours plus vite que si elle suit un trajet rectiligne.

Etonnant, non ?

Nous avons fabriqué un dispositif expérimental avec lequel nous avons fait plusieurs manipulations. Mais il nous a d'abord fallu comprendre ce qu'est une cycloïde.

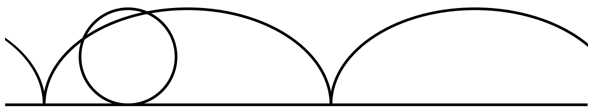
Qu'est-ce qu'une cycloïde ?

Prenons une roue de bicyclette et sa valve. En faisant rouler la roue sur une route plane, la valve décrit une courbe infinie que l'on appele une ***cycloïde***.

Loi de Antoine 8

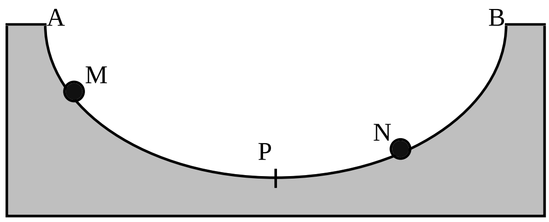
Si A et B et N sont des nombres différents de 0,

$$\frac{A}{B} = \frac{N \times A}{N \times B}$$



Cette courbe possède donc une propriété très intéressante : si une bille roule le long de cette courbe, elle va plus vite que sur n'importe quelle autre trajectoire. La cycloïde est ***brachystochrone***.

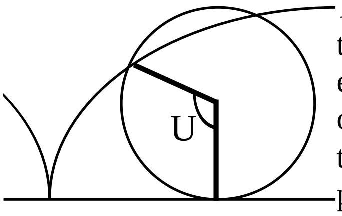
La cycloïde est aussi ***tautochrone*** : si on lâche deux billes à deux points différents de la cycloïde, ces deux billes arrivent en même temps au point P (point le plus "bas").



Nous avons obtenu une trajectoire cycloïdale en découpant une planche de bois sur laquelle nous avions tracé un arc de cycloïde en faisant tourner un disque de carton le long d'une règle.

Nous avons filmé et chronométré diverses expériences afin de mieux visualiser ce qui se passait simultanément sur les trajectoires cycloïdale et rectiligne. La boule sur la trajectoire cycloïdale prenait plus de vitesse dès le départ par rapport à celle de la trajectoire rectiligne. D'après nos expériences filmées il semblerait, qu'au ralenti, la boule sur la trajectoire cycloïdale ayant passé le point le plus bas, "P", subit une perte de vitesse. Ce qui permet à la boule sur la trajectoire rectiligne de rattraper en partie l'autre boule, mais pas suffisamment pour la dépasser, finalement la boule sur la trajectoire cycloïdale arrivait juste avant l'autre boule.

Nous avons tenté de comprendre pourquoi la cycloïde est brachistochrone.

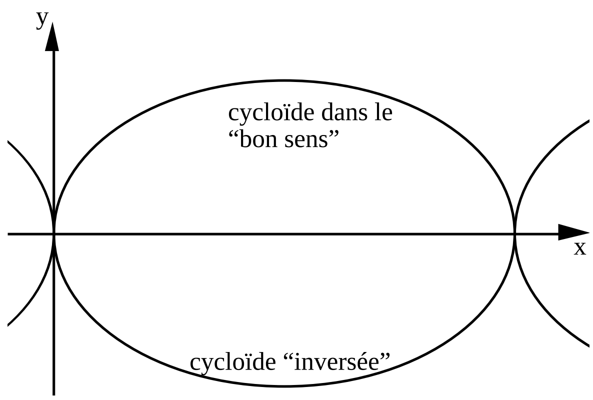


Nous avons construit une cycloïde en calculant les coordonnées d'un certain nombre de points situés sur cette courbe. Nous avons utilisé les formules suivantes (nous les avons trouvées dans des documents) :

$$x = R(U - \sin U)$$
$$y = R(1 - \cos U)$$

"U" représente l'angle (exprimé en radians) formé par le point de contact de la "roue" avec la "route" , le centre de la roue et la valve.

Nous prenons donc U = 0 rad pour le calcul des coordonnées du point de départ A et U = π rad pour le point d'arrivée B. Il suffit de prendre des valeurs pour U comprises entre 0 rad et π rad et nous obtenons les coordonnées d'autant de points qu'on désire.



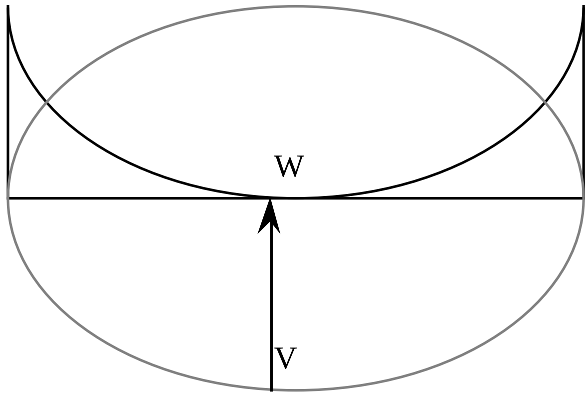
Mais il y a un problème : en procédant ainsi, nous obtenons une cycloïde "dans le bon sens", or nous devons travailler sur une cycloïde "inversée".

Etudions les transformations subies par la cycloïde lors de son "inversement". On effectue d'abord une symétrie axiale que l'on fait suivre d'une translation de $\overrightarrow{VW}$, où VW est égal au diamètre de la roue.

Puisque R (le rayon) est égal à 1, alors VW=2

Ces transformations se traduisent par :

— pour la symétrie, on donne l'opposé des ordonnées de chaque point.



— pour la translation, on ajoute à chaque ordonnée la longueur du vecteur $\overrightarrow{VW}$ (2).

Mais on peut directement transformer la formule de départ :

$$x = R\,(U - \sin U)$$
$$y = R\,(1 - \cos U)$$

symétrie :

$$x = R\,(U - \sin U)$$
$$y = -\,R\,(1 - \cos U)$$

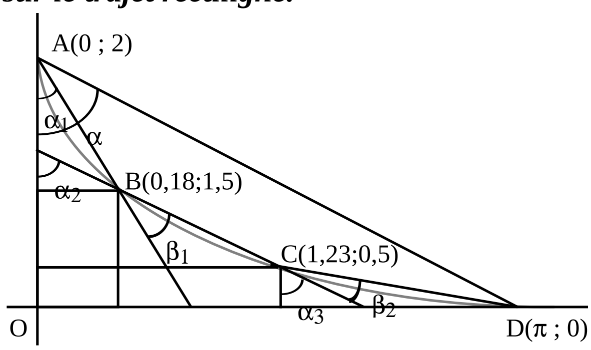
translation :

$$x = R\,(U - \sin U)$$
$$y = 2 - R\,(1 - \cos U)$$

Et puisque R = 1, alors on a :

$$x = U - \sin U$$
$$y = 2 - 1 + \cos U \quad \text{donc} \quad y = 1 + \cos U$$

Calcul du temps de parcours sur le trajet rectiligne.



Le point de départ est le point A : ses coordonnées sont $x_A = 0$ et $y_A = 2$ (on prend U = 0 rad). Le point d'arrivée est le point D :

ses coordonnées sont $x_D = \pi$ et $y_D = 0$ (on prend $U = \pi$ rad).

Une fois que l'on a obtenu les coordonnées des points A et D, on calcule les distances entre chaque point par la formule :

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$$

Calculons maintenant la valeur de t (temps), grâce à la formule : $t = \sqrt{\dfrac{2z}{g\cos\alpha}}$

z est la différence d'altitude entre les points A et D donc $z = y_A - y_D$, $\cos\alpha = z / AD$, et g est la gravité à Paris (9,81).

Simplifions cette formule :

$$t = \sqrt{\frac{2(y_D - y_A)}{g\dfrac{z}{AD}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(y_D - y_A)}{g\dfrac{y_D - y_A}{AD}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{g\dfrac{1}{AD}}} = \sqrt{\frac{2\,AD}{g}}$$

Le temps mis pour aller de A à D est donc ***de 0,871 secondes.***

Calcul du temps
sur la trajectoire cycloïdale.

Il est facile de calculer le temps sur une trajectoire rectiligne mais pour des trajectoires courbes, cela se complique. Nous avons donc eu l'idée de décomposer la cycloïde en plusieurs petits segments de droite. Cela nous permet d'utiliser les formules précédentes sur chacun des petits segments. Plus on prendra de segments, plus nos approximations seront correctes. Pour illustrer la méthode, nous n'avons pris que 4 points sur la cycloïde.

Une fois que l'on a obtenu les coordonnées des points A, B, C et D, on calcule les distances entre chaque point par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Calculons maintenant la valeur de t (temps), grâce à la formule précédente : $t = \sqrt{\dfrac{2\,AB}{g}}$

<u>Loi de Jonathan 1</u>

Il existe deux sortes d'infini :
L'infiniment grand : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …
L'infiniment petit : -1, -2, -3, -4, -5, -6, …

Nous avons donc calculé le temps mis pour aller de A à B :

$x_A = O$; $y_A = 2$
et $x_B = 0{,}1811$; $y_B = 1{,}5$ donc

AB = 0,5318 cm et **le temps mis pour aller de A à B est de 0,33 secondes**.

Pour calculer le temps mis pour aller de B à C, nous devons tenir compte de la vitesse accumulée au cours du trajet AB. Nous devons calculer le temps à l'aide de la formule

$$z = (1/2)g\cos\alpha_2 t^2 + v\cos\beta_1 t$$

où v est la vitesse atteinte au point B.

Nous allons calculer les coefficients de l'équation du second degré.

x_C =1,23 environ $y_C = 0{,}5$
$\cos\alpha_2 = (y_B - y_C)/BC$ BC = 1,449 environ
$\cos\alpha_2 = 0{,}69$ environ ($\alpha_2 = 46{,}37°$ environ)

Calcul de la vitesse atteinte
par la bille au point B

$v = g\cos\alpha_1 t$, où α_1 est l'angle formé par le segment [AB] et la verticale.
$\cos\alpha_1 = (y_A - y_B)/AB$ (α_1=19,91°environ)
$v = g[(y_A - y_B)/AB]\,t = 3{,}04$ cm/s environ.
β_1 est l'angle formé par le segment [BC] et la droite (AB) : $\beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 \approx 26{,}46°$ environ, $\cos\beta_1 = 0{,}90$. L'équation devient donc :

$$y_B - y_C = \frac{1}{2}g \times 0{,}69\,t^2 + 3{,}04 \times 0{,}9\,t$$

c'est-à-dire $1 = 3{,}38\,t^2 + 2{,}74\,t$, c'est-à-dire $3{,}38\,t^2 + 2{,}74\,t - 1 = 0$. Il faut donc résoudre cette équation du second degré. Nous ne savons pas le faire, mais nous avons trouvé une solution approchée par des encadrements successifs.

Valeur de t	**Valeur de $3.38t^2 + 2.74\ t - 1$**
0	- 1
1	5,12
0,5	1,215
0,25	-0,10375
0,3	0,1262
0,29	0,078858
0,27	-0,013798
0,275	0,0091125.

Pour aller de B à C, la bille met environ 0,275 secondes.

Pour calculer le temps mis pour aller de C à D, *nous allons calculer la vitesse de la bille atteinte au point C.*

$$v = g \cos \alpha_2 t = 1{,}86 \text{ cm/s environ.}$$

$x_C = 1{,}23$ environ $\quad y_C = 0{,}5$
$x_D = 3{,}14$ environ $\quad y_D = 0$
$\cos \alpha_3 = (y_C - y_D) / CD$
$CD = 1{,}97$
$\cos \alpha_3 = 0{,}25$ environ

L'équation à résoudre est donc :

$$y_C - y_D = \frac{1}{2} g \cos \alpha_3 t^2 + v \cos \beta_2 t$$

$$\beta_2 = \alpha_3 - \alpha_2 = 29{,}15$$

On a donc :

$$0{,}5 = \frac{1}{2} g \times 0{,}25\ t^2 + 1{,}86 \times 0{,}87\ t$$

$$0{,}5 = 1{,}23\ t^2 + 1{,}62\ t$$

L'équation à résoudre est donc :

$$1{,}23\ t^2 + 1{,}62\ t - 0{,}5 = 0$$

Par approximations successives nous avons trouvé que la bille met *environ 0,258 secondes* pour aller du point C au point D. La bille met donc *environ 0,863 secondes* pour parcourir les trois segments de droite qui approchent la trajectoire cycloïdale.

D'après nos calculs, la bille va effectivement plus vite en empruntant la trajectoire cycloïdale. Elle arrivera avec ***0,008 secondes*** *d'avance.*

Bien entendu, ce résultat est probablement très imprécis ; il faut absolument faire les calculs avec de très nombreux points. Seul un programme d'ordinateur pourra le faire à notre place, maintenant que nous avons la méthode.

Ce problème est à peu près résolu mais bien d'autres questions restent posées ; en particulier nous ne savons toujours pas s'il existe une trajectoire où la boule va encore plus vite. Donc à bientôt pour la suite …