Constructions mécaniques

par Cédric Mohamed (TC)
du
Lycée Georges Braque d'Argenteuil

enseignantes : Mmes Joëlle Richard et Christine Rouaud

chercheur : Mme Catherine Goldstein, mathématicienne, Université Paris XI, Orsay.

“Des objets qui font les Maths” … disait la présentation de ce thème au début de cette année.

Mes camarades du lycée Racine avaient imaginé des instruments mécaniques, l'un d'entre eux nous permettant de construire le symétrique d'une figure donnée. Personnellement, ayant rencontré dans un exercice sur les complexes la construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas, j'ai cherché la construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas sans utiliser les nombres complexes et je l'ai justifiée à l'aide de la trigonométrie.

Méthode de construction.

On utilise un cercle de rayon R et deux de ses diamètres [AB] et [CD] orthogonaux.

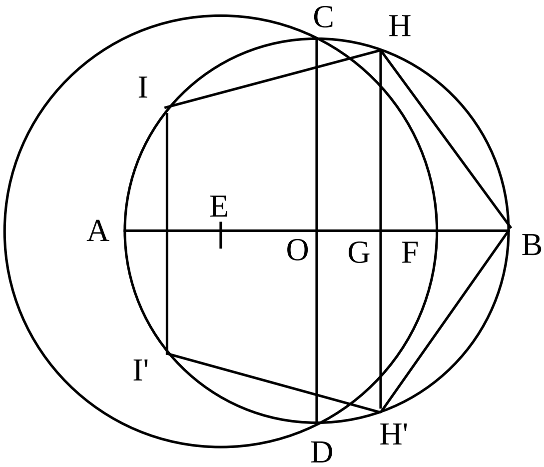

Figure 1.

Loi de Rémi 2
Si on connait un multiple de 7 voici comment faire pour trouver le suivant :
Si le chiffre des unités est plus petit que 3, ajouter 7 aux unités.
Si le chiffre des unités est plus grand que 3, enlever 3 aux unités et ajouter 1 aux dizaines.

B est le premier point du pentagone. A partir du milieu E de [AO] on reporte la distance EC sur la droite (AB). On obtient le point F de [AB]. On mène la parallèle à (CD) passant par G milieu de [OF], ses points d'intersection avec le cercle sont le 2ème et 3ème sommets du pentagone. Il faut reporter la distance BH pour obtenir les deux derniers sommets.

Au compas seul …

J'ai voulu essayer de construire le pentagone régulier uniquement au compas, ayant découvert dans un article que l'abbé Mascheroni avait démontré que “*tout point pouvant être construit à la règle et au compas, peut se construire avec le compas seul*”.

J'ai dû passer par la construction de points particuliers que j'avais obtenus lors de la construction à la règle et au compas (points B, E = M, C, F).

Le premier point à obtenir sur le cercle C(0, R) est le point B diamétralement opposé à A.

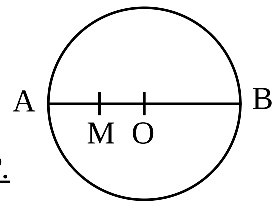

Figure 2.

En reportant 3 fois le rayon sur le cercle, nous avons ainsi trois triangles équilatéraux ayant un sommet en commun (O) et deux consécutifs d'entre eux ayant un côté en commun.

Puis il faut construire le milieu d'un bipoint (A, O).

Construction du milieu …

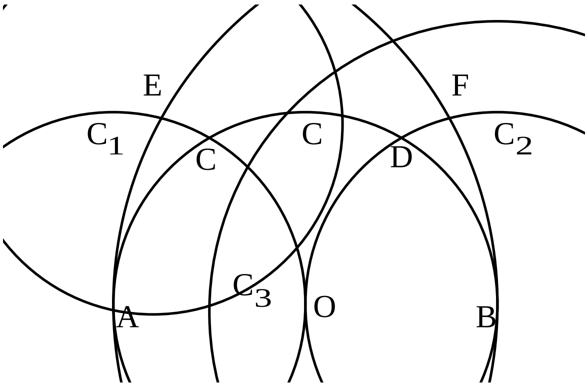

Figure 3.

1) Tracer le cercle C de centre O passant par A ;
2) Reporter trois fois le rayon sur le cercle on obtient B ;
3) Tracer les cercles C_1 et C_2 de centres respectifs A et B de rayon [OA] sécants au cercle C en C et D
4) Tracer les cercles de centre A et B de rayon AB. Les points d'intersection avec C_1 et C_2 sont E et F
5) Tracer C_3(E,AE), tracer le cercle C(B, EF), le point d'intersection de ces deux cercles est le milieu du bipoint (A, O). *Il a fallu tracer 9 cercles pour obtenir ce point M.*

Justification de cette construction

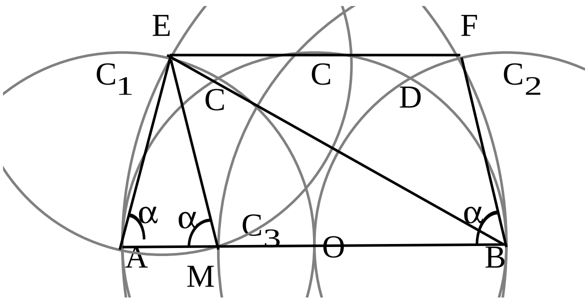

Figure 4.

(EF) parallèle à (AB) par symétrie ; EM=FB ; EF = MB ; (EF)//(MB) donc A, M, B alignés.
BE = AB = 2R ; AE = R ; (A, B, E) isocèle A, M, O, B alignés.
(A, E, M) isocèle de sommet principal E donc $\angle$ EAM = $\angle$ AME = α. Les deux triangles (A, M, E) et (A, E, B) ont 2 angles respectivement égaux, ils sont semblables donc :
EM/BE = MA/EA ; MA = EMxEA/BE = R/2 donc *M est le milieu de [AO].*

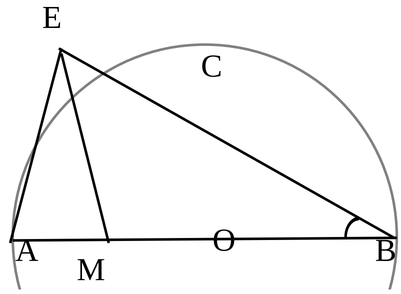

Figure 5.

et le milieu de l'arc …

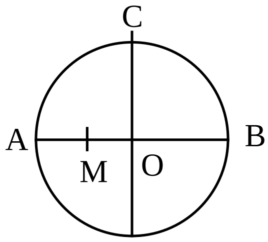

Figure 6.

J'avais alors besoin de construire le troisième sommet d'un triangle isocèle de sommet O connaissant le côté [AO] (c'est-à-dire le milieu de l'arc AB).

Le cercle C(O, AB) rencontre C_1(B, AO) en S et C_2(S, OA) en T. C_3(B, BT) et C'(A,AS) se coupent en K.

C(O, OA) rencontre C_5(B, OK) en C.

J'ai besoin de 7 cercles pour construire ce point.

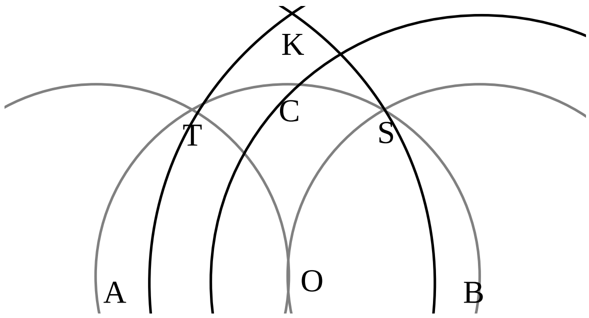

Figure 7.

Justification

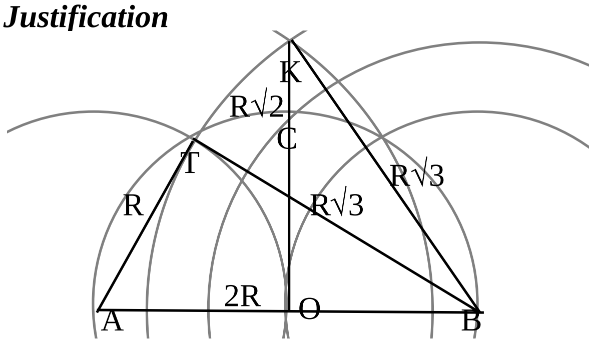

Figure 8.

OB = BS = ST = R

Dans le triangle (T, B, A) :

TA= R ; AB= 2R ;

$TB = \sqrt{(AB^2 - TA^2)} = R\sqrt{3}$

$TB = BK = AK = R\sqrt{3}$

(A, K, B) isocèle de sommet principal K donc $(AB)\perp(OK)$.

Dans le triangle rectangle (O, B, K) :

$OK = \sqrt{(KB^2 - OB^2)} = R\sqrt{2}$.

Dans le triangle (O, B, C), on a :

OB = OC = R car $C \in$ C,

$CB = OK = R\sqrt{2}$.

Le triangle (O, B, C) est donc rectangle en O et isocèle.

9, 7, 29 !

La construction du point suivant (F) m'a posé beaucoup de problèmes. F est déterminé par l'intersection de la droite (AB) avec le cercle de centre E milieu de [OA] et de rayon [EC]. Il s'agit donc de savoir construire l'intersection d'un cercle et d'une droite passant par le centre du cercle.

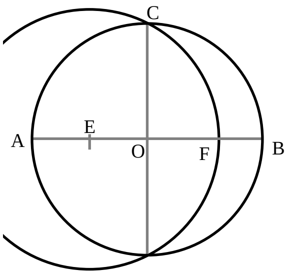

Figure 9.

Construction de l'intersection du cercle de centre O, de rayon R, et d'une droite (OI) (non tracée)

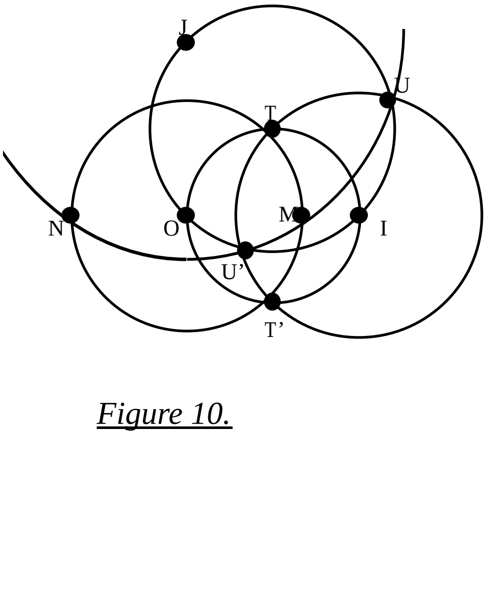

Figure 10.

Loi de Nadia 1	Pour les puissances de 8 :	
8 x 8	se termine par	4
8 x 8 x 8	se termine par	2
8 x 8 x 8 x 8	se termine par	6
8 x 8 x 8 x 8 x 8	se termine par	8
8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8	se termine par	4
et après, ça continue toujours pareil :		
4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, 8, …		

Tracer successivement :

* le cercle de diamètre [OI] qui coupe C(O, R) en T et T' ;

* le point J tel que (I, O, J) soit rectangle isocèle en O (voir figure 7) ;

* le cercle C_1 de diamètre [IJ] qui coupe C_2(I, IT) en U et U'

* le cercle C_3(J, JU) qui coupe C(O, R) en M et N, points recherchés (c'est-à-dire le point F de la figure 9).

(Au total 29 cercles, si l'on compte ceux qui sont nécessaires à la construction du milieu de [IJ] et du point J).

Justification

Pour le triangle rectangle (J, U, I) :

$JU^2 = IJ^2 - IU^2$

Pour le triangle rectangle (I,T,O) :

$TI^2 = IU^2$

$IT^2 = OI^2 - OT^2 = OI^2 - ON^2$

Ainsi $JN^2 = JU^2 = IJ^2 - (OI^2 - ON^2)$

$= (IJ^2 - OI^2) + ON^2$

$JN^2 = UJ^2 + ON^2$

Donc le triangle (J, O, N) est rectangle en O et (O, I, J) est rectangle en O donc N, O, I sont alignés.

Rien ne sert de courir …

Les deux dernières opérations nécessaires à la règle et au compas peuvent être remplacées par une seule opération au compas.

J'obtiens ainsi les 2ème et 3ème sommets du pentagone, les points H et H' de la figure suivante.

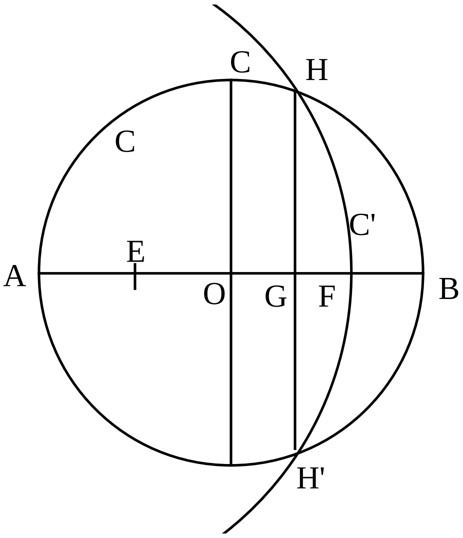

Figure 11.

Les points H et H' peuvent être obtenus en traçant le cercle (A,AF). Justifions-le !

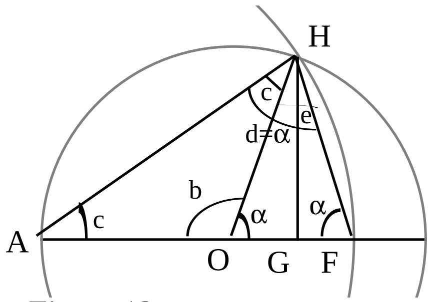

Figure 12.

α = mesure de l'angle ∠ HOF.
α = 2π/5 et (H, O, F) isocèle, donc
e = π - 2α = π/5 = ∠ OHF
A, O, F alignés et donc
b = ∠ HOA = π - α = 3π/5

(A, O, H) isocèle car 0 est le centre du cercle contenant A et H.
c=(π - b)/2 = π/5
∠ AHF = d = c + c = 2π/5 = α
AHF = AFH donc le triangle (A, H, F) est isocèle.

Donc H est l'intersection du cercle C(O,OA) et du cercle C'(A, AF).

Il ne reste plus qu'à reporter la distance BH sur le cercle C(O,OA) à partir de H et de H' pour obtenir les deux derniers sommets du pentagone, I et I'.

Si vous avez eu la patience de me lire jusqu'au bout, *à votre avis, de combien ai-je eu besoin de cercles ?* Leur nombre est considérable : 9 + 7 + 29 + 1 - 10* = 36

* Cercles communs

… ***J'ai tracé 36 cercles.*** *(Mais quel est le nombre minimum de cercles à utiliser pour construire cette figure ?)* Je ne les fais pas tous figurer sur une même figure car celle-ci deviendrait illisible. On peut maintenant essayer de diminuer, si c'est possible, le nombre de cercles nécessaires pour cette construction.

Les points H et H' sont obtenus en une seule opération alors qu'il en faut deux à la règle et au compas. Je n'ai pas étudié le problème à fond, mais j'ai remarqué que certains cercles interviennent fréquemment. Je laissse ce travail aux futurs "MATh.en.JEANS". Je leur souhaite bon courage.

NDLR : les élèves du lycée Racine ayant abandonné leur participation à "MATh.en.JEANS" en cours d'année, ceux de Georges Braque se sont retrouvés sans correspondants (dommage …). Des mathématiciens du LSD2 se sont proposés pour jouer un rôle de correspondants, et ont donc "planché" sur les sujets. Ils ont envoyé par fax les résultats de leurs cogitations, mais trop tard pour les élèves de Braque, dont le travail était déjà avancé. A titre de pistes de recherches envisageables pour les lecteurs de cette brochure, nous vous proposons ce travail du LSD2 de Grenoble.

Empilement mobile de cercles.

Des bouteilles (en coupe : des cercles) sont empilées dans une caisse à fond horizontal. Chacune repose sur deux bouteilles de la couche en dessous ou (pour les couches de numéro impair) sur l'une des deux bouteilles extrêmes en touchant le côté de la caisse.

On constate (et on peut démontrer) que si la première couche comporte k cercles, dont k-2 sont mobiles, ainsi que les k centres de la couche n° 2k-1 (la dernière sur les figures), cette dernière couche est symétrique de la première. En outre, elle est horizontale si les bords de la caisse sont verticaux.

Les propriétés d'alignement et de symétrie se conservent lorsqu'on déplace les bouteilles mobiles du bas ! On peut même permettre aux cercles d'une même couche de s'intersecter et incliner les bords de la caisse !

Pour k = 4 on a en outre un alignement dans la couche du milieu (la 4ème).

Charles Payan et groupe Cabri-géomètre,
LSD2, 1989. (voir illustration page 78)