Une belle histoire de polygones et de pixels

Auteurs : divers et anonymes.

Conteur : Charles PAYAN (CNRS)
LSD2 BP 53X 38041 GRENOBLE Cedex.

Introduction

L'utilisation des ordinateurs et la représentation à l'écran de figures formées d'un nombre fini d'éléments ("pixels") situés à des positions bien précises, conduit à se poser les problèmes géométriques de manière différente.

Par exemple, les dessins suivants peuvent-ils représenter un segment ou un arc de cercle ?

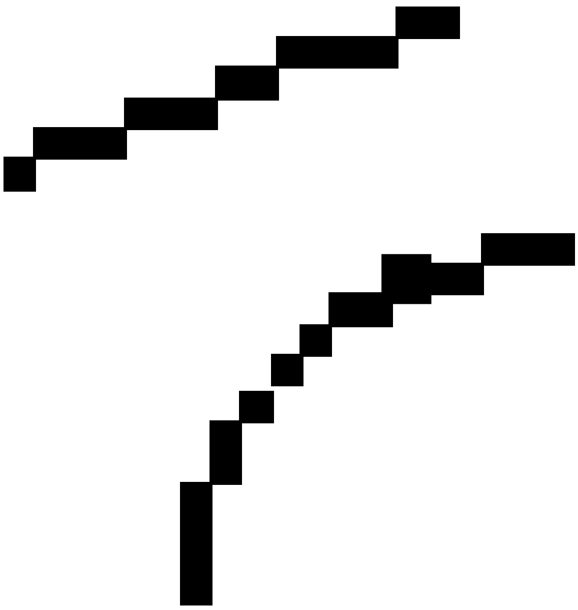


Figure1

Comment faire tourner une figure d'un angle donné ?

Les centres des pixels d'un écran sont situés aux sommets d'un quadrillage (ou grille : réseaux à maille carrée). Quels types de figures peut-on former à l'aide de ces seuls points ?

Nous allons présenter ici un petit problème dont la solution —très simple— permet d'accéder à des notions relativement complexes (par exemple, l'irrationalité de tg $2\pi/n$ pour n entier différent de 1, 2, 4, 8).

Problème

Peut-on dessiner un polygone régulier dont les sommets sont situés aux sommets d'un quadrillage ?
Bien sûr, on peut aisément obtenir un carré :

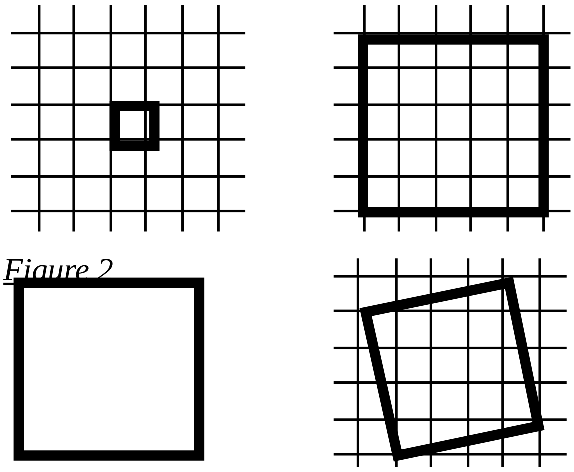
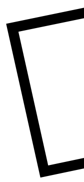


Figure 2



Mais qu'en est-il du triangle équilatéral, du pentagone régulier, de l'hexagone, ... etc ? Les figures suivantes sont-elles des octogones réguliers ?

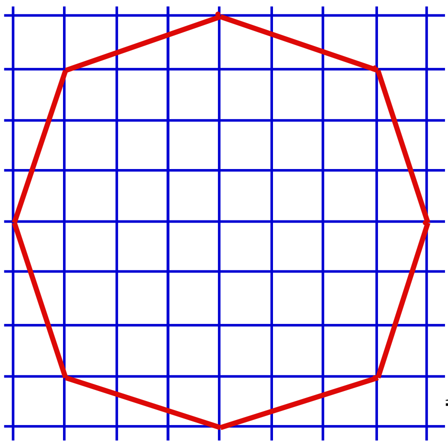


Figure 3

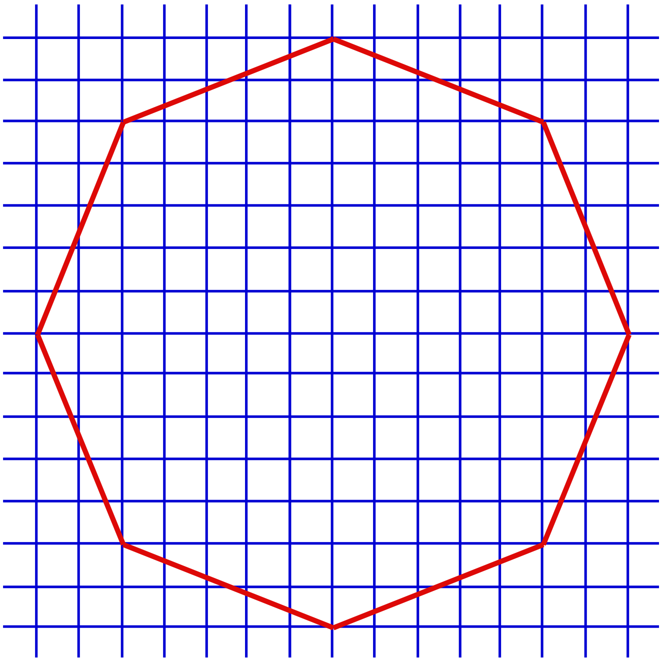


Figure 4

Ici un problème de définition se pose.

Si un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés sont égaux, la réponse à cette question est oui (quoique … mais nous verrons ça plus loin). Mais alors, le polygone (ABABABAB) serait aussi un octogone régulier.

Par polygone régulier, nous entendrons un polygone dont tous les côtés et tous les angles sont égaux.
Ou, définition équivalente, un polygone régulier (à n côtés) sera un polygone (à n côtés) conservé par rotation d’angle $2\pi/n$ autour d’un point qui sera appelé le centre du polygone. Par exemple, un octogone régulier est conservé par des rotations de 45°.

A la fin de cet article, nous examinerons le cas des polygones qui ont simplement soit leurs côtés égaux, soit leurs angles égaux.

Plus petit polygone

Supposons que l’on puisse dessiner sur un quadrillage des polygones réguliers à n côtés. Pour fixer les idées, prenons n = 8. Parmi tous ces octogones, en existe-t-il des plus petits ?

Pour des octogones dessinés sur un plan non quadrillé, cette question n’a pas de sens : en effet étant donné un octogone régulier on pourra toujours en dessiner un légèrement plus petit à l’intérieur. On peut mesurer la “taille” de ces polygones par exemple par leur aire.

Plaçons nous maintenant dans un plan quadrillé.

A tout polygone P associons le nombre de points du quadrillage situés à l’intérieur du polygone. Par exemple, pour l’octogone de la figure 3 ce nombre est 45.

On pourra remarquer que ce nombre, que nous noterons S(P) est en fait relié à l’aire du polygone. Le lecteur pourra essayer de trouver cette relation. Nous dirons que P_1 est plus petit que P_2 si $S(P_1) < S(P_2)$. S(P) étant un entier positif ou nul, on peut maintenant parler de “plus petits” polygones.

Construction de polygones réguliers “plus petits”

Construction C1

Sur deux côtés consécutifs d’un polygone on construit un parallélogramme (si le polygone est régulier, ce parallélogramme est un losange). Au sommet B commun à ces deux côtés on associe le quatrième sommet B_1 du parallélogramme. Au polygone P on associe ainsi le polygone P_1. (voir figure 5, sans regarder le quadrillage)

Construction C2

Si AB est un côté du polygone, soit AB_2 le segment obtenu à partir de AB par une rotation de $\pi/2$ autour de A. Au sommet B du polygone on associe ainsi le point B_2 et au polygone P le polygone P_2. (voir figure 6, toujours sans regarder le quadrillage)

(Exercice : pour quels polygones P, les polygones P_1 et P_2 sont-ils les mêmes ?)

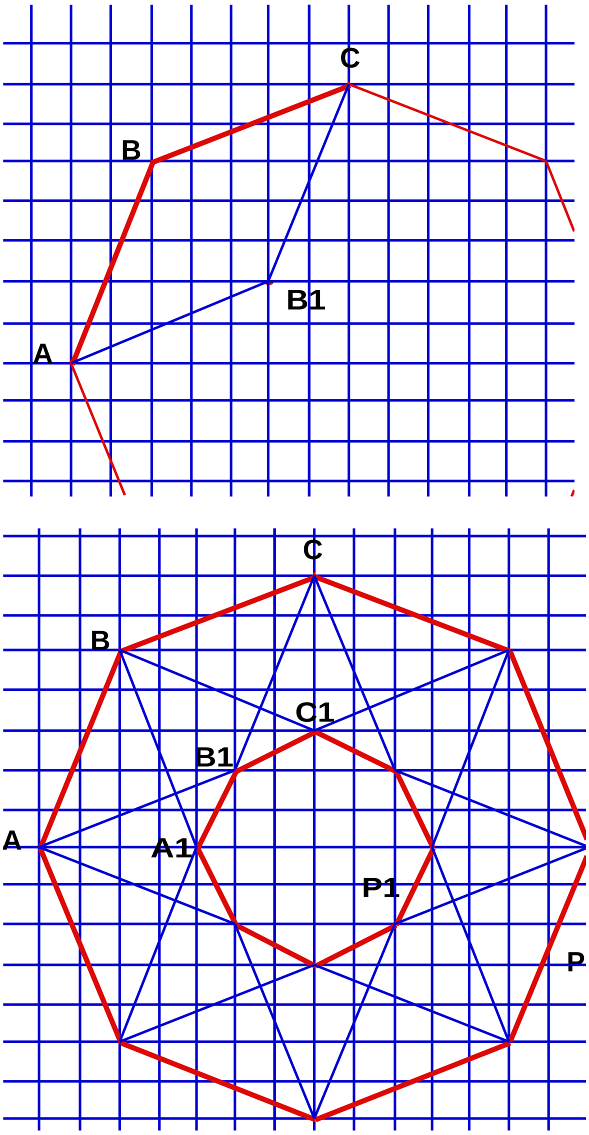


Figure 5

Pour ces deux constructions, puisque on fait la même chose en chaque sommet, toute transformation qui conserve les sommets du polygone P conserve aussi ceux du polygone transformé. Si le premier polygone est régulier (c'est-à-dire conservé par rotation) le second l'est aussi[1].

Si les sommets obtenus par construction sont à l'intérieur du polygone, on obtient un polygone plus petit.

[1] Cette preuve sera sans doute jugée pas très orthodoxe …

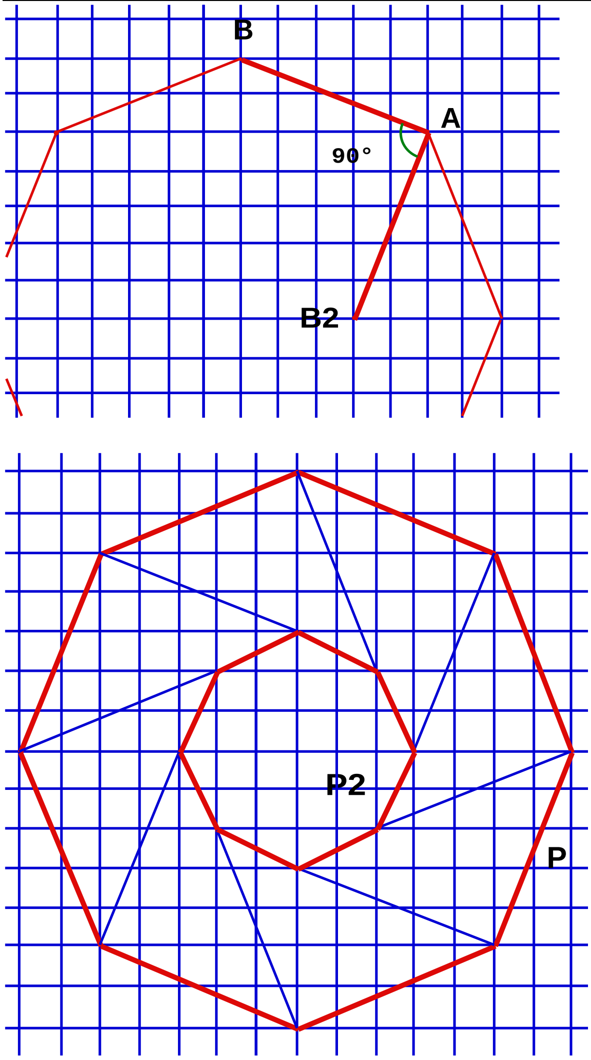


Figure 6

Par la construction C2, pour le triangle équilatéral, on obtient un triangle équilatéral plus grand ; pour le carré, on obtient le même carré ; pour tous les autres polygones réguliers, il est facile de voir que l'on obtient un polygone régulier plus petit.

Par la construction C1, on a le même résultat, sauf pour l'hexagone où l'on obtient un hexagone dégénéré : tous les points de la construction sont confondus au centre.

Replaçons nous sur le plan quadrillé

Si trois sommets d’un parallélogramme sont aux sommets d’un quadrillage, le quatrième est aussi sur un sommet de ce quadrillage. Si les deux extrémités d’un segment AB sont aux sommets d’un quadrillage, le point B2 obtenu par rotation de AB de $\pi/2$ est aussi sur un sommet du quadrillage.

Donc, à partir d’un polygone dont les sommets sont situés sur un quadrillage, on obtient par les constructions C1 et C2, un polygone dont les sommets sont aussi placés sur ce quadrillage. (voir les figures 5 et 6, mais cette fois en regardant le quadrillage)

On est maintenant en mesure de répondre à la question de savoir s’il est possible de placer un polygone régulier sur un quadrillage.

Supposons que l’on ait placé des polygones réguliers à n côtés sur un quadrillage. Parmi ces polygones, choisissons un des plus petits : P_n (c’est-à-dire un de ceux pour lesquels $S(P_n)$ est minimum).

Pour n entier différent de 1, 2, 3, 4, par la construction C2 on obtient un autre polygone régulier P'_n, placé lui aussi sur le quadrillage et plus petit ($S(P'_n) \leq S(P_n) - n$, les n sommets de P'_n étant à l’intérieur de P_n et non de P'_n). On aboutit ainsi à une contradiction.

Pour $n \geq 5$ il est donc impossible de placer un polygone régulier sur un quadrillage.

Nous avons vu que l’on pouvait placer un carré, peut-on placer un triangle équilatéral ? En utilisant la construction C1, si l’on pouvait placer un triangle équilatéral, on pourrait placer un hexagone régulier, ce qui est, on vient de le voir, impossible (voir figure 7).

Le carré est donc le seul polygone régulier que l’on peut placer sur un quadrillage.

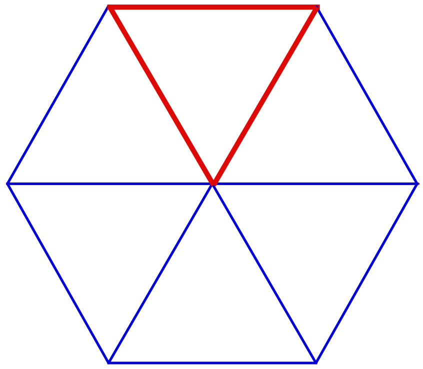


Figure 7

Généralisation à d’autres dimensions

Au lieu de considérer un quadrillage dans le plan, on peut se placer maintenant dans l’espace à 3 dimensions (et plus généralement dans un espace de dimension quelconque d) et considérer un “quadrillage” (ou … “cubage” ?) de cet espace : réseau de petits cubes de dimension 3, 4, … d.

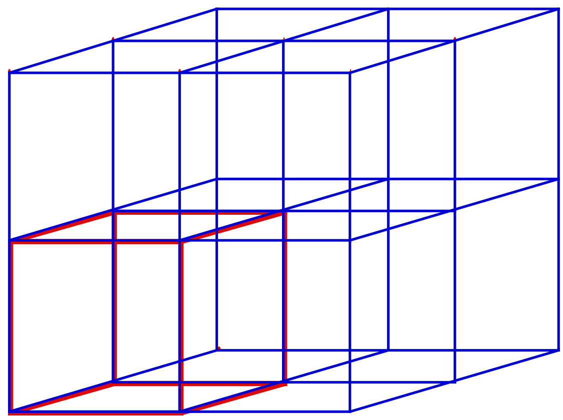


Figure 8

Si un parallélogramme a trois sommets sur un “quadrillage” de dimension d, le quatrième est aussi sur ce quadrillage.

Par la construction C1, pour n entier différent de 1, 2, 3, 4, 6 on peut donc à partir d’un polygone régulier P_n, placé sur un quadrillage de dimension d, construire un polygone régulier plus petit P'_n, placé lui aussi sur ce quadrillage. En supposant que P_n est un des plus petits polygones réguliers que l’on puisse placer sur un quadrillage, on aboutit à une contradiction.

Contrairement à la constuction C1, la construction C2 ne permet pas de "rester" sur le quadrillage. On n'aboutit à aucune contradiction pour le triangle équilatéral et l'hexagone régulier que l'on peut effectivement placer sur la grille de dimension 3.

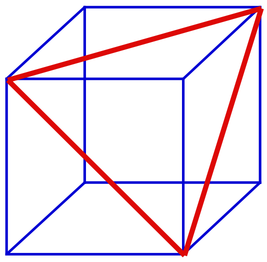


Figure 9

Le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier sont donc les seuls polygones réguliers que l'on peut placer sur un quadrillage de dimension d ≥ 3.

Polygones angles-réguliers
— Irrationalité de tg 2π/n

Présentons les choses de manière un peu différente. Au lieu de parler de quadrillage, nous allons considérer le plan cartésien (ou plus généralement, un espace de dimension d muni d'un repère orthonormé) et l'on s'intéresse aux points de cet espace à coordonnées entières : ce sont les sommets de notre quadrillage.

Nous venons de montrer qu'il n'existe pas de polygones réguliers dont les sommets ont des coordonnées entières (sauf le carré et, en dimension supérieure ou égale à 3, le triangle équilatéral et l'hexagone régulier).

Nous venons également de montrer la même impossibilité pour des polygones réguliers dont les sommets ont des coordonnées rationnelles (c'est à dire de la forme p/q avec p et q entiers).

En effet, si les points d'une figure sont à coordonnées rationnelles en grossissant suffisamment cette figure, on peut obtenir une figure semblable dont les points sont à coordonnées entières.

Considérons maintenant un polygone à n côtés ayant tous ses angles égaux ; si ses sommets sont à coordonnées entières, cela implique en particulier qu'il existe 3 points formant un angle de $2\pi/n$.

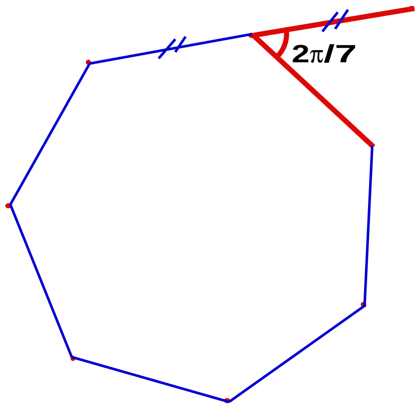


Figure 10

Par ailleurs, si tg $\alpha = p/q$, les 3 points de coordonnées (q, 0), (0, 0), (q, p) forment un angle α.

Nous allons montrer que pour n différent de 1, 2, 4 il n'existe pas trois points à coordonnées rationnelles formant un angle $\alpha = 2\pi/n$. (Dans l'espace à 3 dimensions, ou plus, on doit rajouter les valeurs 3, 6, 12.)

Raisonnons par l'absurde. Considérons d'abord le cas où n est pair (n = 2p).
Soit A_1, O, B trois points formant un angle $2\pi/n = \pi/p$ (se reporter à la figure 11).
Soit A_2 le point symétrique de A_1 par rapport à la droite (OB).
A_2 est un point à coordonnées rationnelles.
$A_1OA_2 = 2\pi/p$. $[OA_2] = [OA_1]$
Soit A_3 le point symétrique de A_1 par rapport à la droite (OA_2).
A_3 est un point à coordonnées rationnelles.
$A_2OA_3 = 2\pi/p$. $[OA_3] = [OA_2]$
…

Soit A_p le point symétrique de A_{p-2} par rapport à la droite (OA_{p-1}). A_1 est le point symétrique de A_{p-1} par rapport à la droite (OA_p). On obtient ainsi p points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ à coordonnées rationnelles formant un polygone régulier à p côtés. Or on a vu que ceci était impossible pour $p \neq 1, 2, 4$ dans un espace de dimension 2 et pour $p \neq 1, 2, 3, 4, 6$ dans un espace de dimension supérieure.

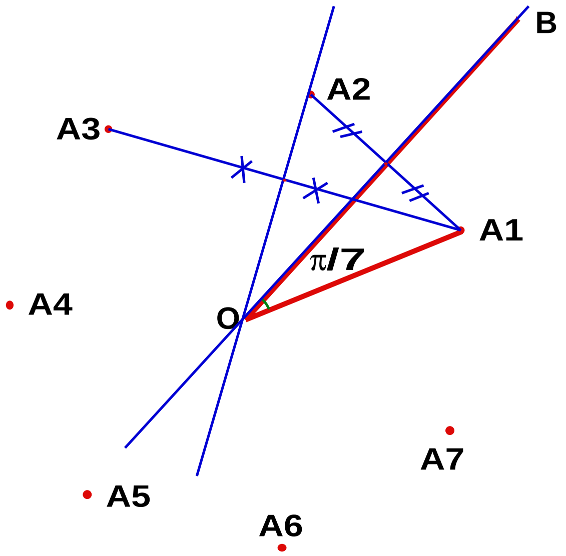


Figure 11

Considérons maintenant le cas n impair. On refait la même construction et l'on obtient dans ce cas les n sommets d'un polygone régulier (en faisant les symétries successives, on fait, dans ce cas, deux tours autour de O). n (impair) est donc nécessairement égal à 3 et à condition de se placer dans un espace de dimension supérieure à 2.

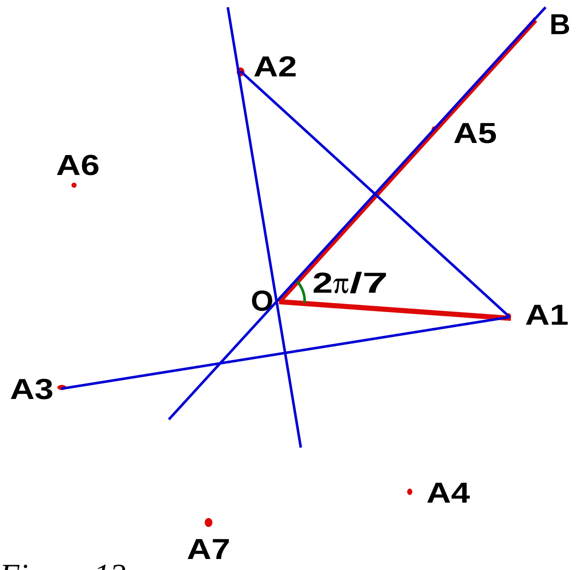


Figure 12

Les seuls polygones angle-réguliers à sommets à coordonnées rationnelles dans le plan sont ceux à 4 et 8 côtés, et dans un espace de dimension supérieure, ceux à 3, 4, 6, 8 et peut-être 12 côtés (essayez pour cette dernière valeur, c'est possible).

Polygones côtés réguliers

On impose maintenant uniquement l'égalité des côtés. Que peut-on réaliser sur le **plan quadrillé** ?

Il est facile de voir que lorsque le nombre de côtés est **pair**, tout polygone est réalisable.

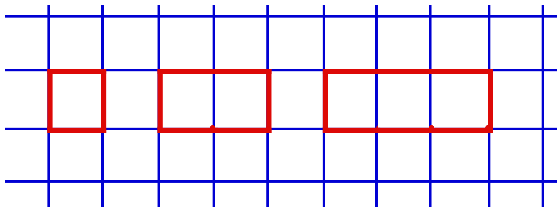


Figure 13

Qu'en est-il pour les polygones à nombre impair de sommets ?

Soit A et B deux sommets extrémités d'un côté, et soit x la différence de leurs abcisses et y la différence de leurs ordonnées. Suivant les parités de x et y nous allons classer les côtés en différentes classes :

x et y pairs : classe (pp)
x et y impairs : classe (ii)
x pair et y impair
ou x impair et y pair : classe (ip)

Calculons $AB^2 = x^2 + y^2$, le carré de la longueur des côtés. En fait, nous allons calculer ce nombre modulo 4 (c'est-à-dire chercher quel reste on obtient lorsque on divise ce nombre par 4).

Classe (pp)

$x = 2r$
$y = 2s$ (r et s entiers)
$x^2 + y^2 = 4r^2 + 4s^2 = 0 \pmod 4$

Classe (ii)

$x = 2r + 1$
$y = 2s + 1$ (r et s entiers)
$x^2 + y^2 = 4r^2 + 4r + 1 + 4s^2 + 4s + 1 = 2 \pmod 4$

Classe (ip)

x (ou y) $= 2r$

y (ou x) $= 2s + 1$ (r et s entiers)

$x^2 + y^2 = 4r^2 + 4s^2 + 4s + 1 = 1$ (modulo 4)

Les côtés du polygone étant tous égaux, leurs carrés sont aussi égaux et le sont donc bien sûr aussi modulo 4.

Tous les côtés d’un polygone “côtés-régulier” appartiennent donc à la même classe, soit (pp), soit (ip), soit (ii). Si tous les côtés sont dans la classe (pp), on peut construire un polygone côtés-régulier, deux fois plus petit dont les sommets seront encore sur la grille. On peut donc éliminer ce cas et ne considérer que les deux autres cas.

1[er] cas : les côtés sont dans la classe (ii)
Colorions alternativement les lignes de la grille en deux couleurs : en bleu les lignes d’ordonnée paire et en rouge les lignes d’ordonnée impaire. La différence d’ordonnée entre deux sommets consécutifs du polygone est impaire, deux sommets consécutifs du polygone sont donc sur des lignes de couleurs différentes. Si l’on colorie chaque sommet du polygone avec la couleur de la ligne sur laquelle il se trouve, les sommets du polygone seront alternativement bleu, rouge, bleu, rouge, … (voir figure 14).

On ne peut donc pas avoir de polygones impairs.

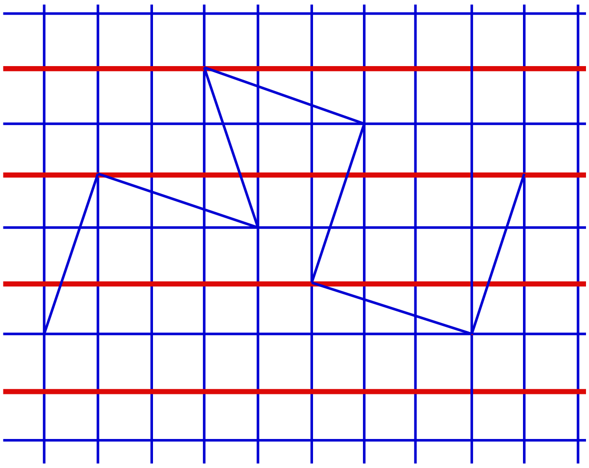


Figure 14

2[ème] cas : les côtés sont dans la classe (ip)
Colorions maintenant les sommets de la grille en deux couleurs, bleu si abscisse et ordonnée ont la même parité, rouge sinon. Ainsi, deux sommets voisins sur la grille ont des couleurs différentes. Il est immédiat de voir que deux sommets consécutifs d’un polygone (ip) sont de couleurs différentes (voir figure 15).

Dans ce cas encore on ne peut avoir que des polygones pairs.

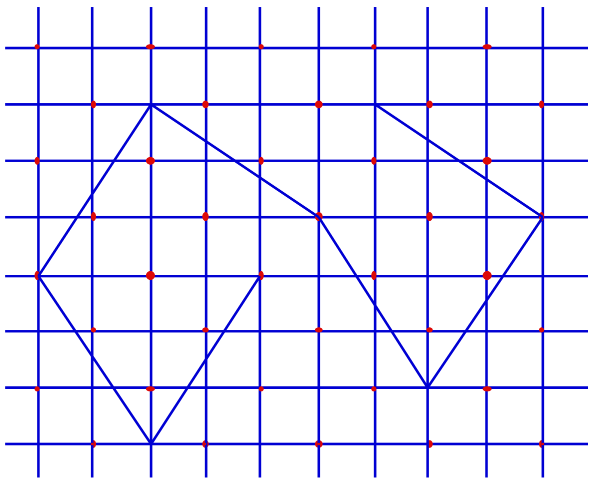


Figure 15

Quelques problèmes au sujet des polygones côtés-réguliers :

— Dans le plan (quadrillé), quels polygones côtés-réguliers pairs, **strictement convexes**, peut-on réaliser ?

— Qu’en est-il pour les polygones côtés-réguliers impairs dans des espaces de dimension supérieure à 2 ?

— Etudier le cas des polygones non plans angles et sommets-réguliers .

Quelques mots de conclusion

La représentation de figures à l’écran, donc le fait de considérer des réseaux à maille carrée, autrement dit, le plan discret, pose des problèmes nouveaux qui sont du domaine de ce que l’on appelle la géométrie discrète. Les raisonnements mis en œuvre semblent, on a pu s’en apercevoir ici, assez différents des méthodes utilisées pour résoudre des problèmes de géométre “continue”. Peut-être permettent-ils davantage d’aborder plus directement les concepts mathématiques essentiels.

Pour finir nous vous proposons de réfléchir aux quelques problèmes que nous venons de traiter, mais en considérant des réseaux à maille triangulaire, rectangulaire, hexagonale …