Polyèdres

par ??? des lycées Val de Seine de Grand Quevilly et Corneille de Rouen

enseignants : MM. Aubert, Fraynay, Pierre Grihon et Jean Toromanoff.

chercheur : M. Daniel Krob, Laboratoire d'Informatique de Rouen.

Le but initial était de trouver une relation liant le nombre de faces (F), d'arêtes (A), et de sommets (S), d'un polyèdre quelconque. Après une première recherche sur des assemblages de cubes, et un décompte des différentes caractéristiques (F, A, S), nous avons découvert quelques formules :

— assemblage faces contre faces :

$$2F + A - 3S = 0$$

— assemblage arêtes contre arêtes :

$$(7/6)F + A - 3S + 5 = 0$$

Nous avons alors constaté que notre domaine de recherche était trop vaste, et nous avons décidé de fixer et de préciser nos définitions, et de nous limiter aux polyèdres convexes :

Polyèdre convexe : solide limité de toutes parts par des polygones plans, tel que tout le volume soit situé du même côté d'un plan tangent à n'importe quelle face.

Face : tout polygone plan qui limite le polyèdre

Sommet : point de l'espace où se rencontrent au moins trois faces

Arête : segment compris entre deux sommets, donc commun uniquement à deux faces.

Aprés l'étude de ces polyèdres, nous avons retrouvé ***la Formule d'Euler*** :

$$F + S - A = 2$$

<u>Loi de Rachida et Hayate 1</u>

$$9 \times 9 = 81$$
$$99 \times 99 = 9801$$
$$999 \times 999 = 998001$$

$$999999999 \times 999999999 = 999999998000000001$$

$$9\underset{N}{\ldots\ldots}9 \times 9\underset{N}{\ldots\ldots}9 = 9\underset{N-1}{\ldots\ldots}980\underset{N-1}{\ldots\ldots}01$$

Démonstration :

L'idée générale est de décomposer le polyèdre convexe en unités de base pour lesquelles la formule est admise et vérifiée (le tétraèdre). On veut alors le reconstruire autour d'un point central, commun à tous les tétaèdres obtenus.

Etapes :

— tout polygone peut être divisé en triangles, donc toutes les faces du polyèdre peuvent n'être constituées que de triangles ;

— en reliant un point du volume à tous les sommets et en explosant le polyèdre, il est possible de n'obtenir que des tétraèdres ;

— la reconstruction du volume est alors possible.

Let's go !

On associe n tétraèdres, face contre face : on a donc (n-1) collages.

A, F, S, désignant le nombre d'arêtes, de faces, de sommets d'un tétraèdre, on a :

$$F + S - A = 2$$

A', F', S', désignant le nombre d'arêtes, de faces, de sommets du polyèdre obtenu, on peut écrire :

$$A' = nA - 3(n - 1)$$

En effet, on apporte, en associant n tétraèdres face contre face, n fois le nombre d'arêtes d'un tétraèdre, et on en perd 3 à chaque collage. En raisonnant de la même manière, on obtient :

$$F' = nF - 2(n - 1)$$
$$S' = nS - 3(n - 1)$$

FORMULE D'EULER $F + S - A = 2$

QUELQUES POLYEDRES

	FACES	SOMMETS	ARETES	
prisme triangulaire	5	6	9	irrégulier
hexaèdre (triangles)	6	5	9	irrégulier
heptaèdre	7	10	15	irrégulier
octaèdre	8	6	12	irrégulier
décaèdre (triangles)	10	7	15	irrégulier
nonaèdre (9 faces)	9	14	21	irrégulier
pentadécaèdre	15	12	25	irrégulier
tétaèdre	4	4	6	régulier
cube	6	8	12	régulier
octaèdre	8	6	12	régulier
dodécaèdre	12	20	30	régulier

On a alors

$F' + S' - A' = nF-2(n-1)+nS-3(n-1)-nA+3(n-1)$
$F' + S' - A' = nF-2n+2+nS-3n+3-nA+3n-3$
$F' + S' - A' = n (F + S - A) - 2n + 2$
$F' + S' - A' = 2n - 2n + 2$ (car $F+S-A = 2$)
$F' + S' - A' = 2$

Donc : $F' + S' - A' = 2$

Insertion des tétraèdres selon deux et trois faces

Par deux faces : A, F, S, désignent le nombre d'arêtes, de faces, de sommets du polyèdre sans le dernier tétraèdre.

a, f, s, désignent le nombre d'arêtes, de faces, de sommets du dernier tétraèdre ;

A', F', S', désignent le nombre d'arêtes, de faces, de sommets du polyèdre final.

En construisant, on observe que :

$$A' = A + a - 6$$
$$F' = F + f - 4$$
$$S' = S + s - 4$$

Donc :

$$F' + S' - A' =(F+f-4)+(S+s-4)-(A+a-6)$$

Or :

$$F + S - A = 2 \text{ et } f + s - a = 2$$

On obtient :

$$F' + S' - A' = (F+S-A) + (f+s-a) - 2$$
$$F' + S' - A' = 2 + 2 - 2$$
$$F' + S' - A' = 2$$

Donc la formule est vérifiée.

Par trois faces

De même on a :

$$A' = A + a - 9$$
$$F' = F + f - 6$$
$$S' = S + s - 5$$

et : $F' + S' - A' =(F+f-6)+(S+s-5)-(A+a-9)$

$$F' + S' - A' = (F+S-A) + (f+s-a) - 2$$
$$F' + S' - A' = 2 + 2 - 2$$
$$F' + S' - A' = 2$$

La formule est également vérifiée

Les solides de Platon

Aprés avoir démontré la Formule d'EULER, nous nous sommes donc intéressés aux cinq polyèdres réguliers. Plus précisément, notre but était de prouver qu'il n'en existe que cinq et de les décrire.

Mais avant tout, *qu'est-ce qu'un polyèdre ré - gulier ?*

— C'est un polyèdre convexe, donc pour lequel la formule : $F + S - A = 2$ est valable ;
— toutes ses faces sont identiques et sont des polygones réguliers ;
— le même nombre d'arêtes, donc de faces, arrivent à un même sommet.

La méthode de recherche fut de traduire les propriétés du polyèdre régulier sous forme d'équations en les remplaçant ensuite dans la Formule d'Euler.

Puis moyennant l'encadrement de deux inconnues, à savoir, le nombre d'arêtes par face, et le nombre de faces qui contiennent le même sommet, nous avons obtenu les cinq uniques polyèdres réguliers :

— le tétraèdre
— le cube
— l'octaèdre
— le dodécaèdre
— l'icosaèdre

Loi de Lou 3

Il y a 8 façons différentes d'écrire 15 avec une seule addition (sans utiliser de 0).

Il y a 18 façons différentes d'écrire 15 avec une addition et une multiplication (sans utiliser de 0).

ex : 2 x 7 + 1 ; 2 x 6 + 3 ; …

Le club des cinq …

Conditions :

n est le nombre de côtés de chaque face ($n>2$)

$A = (n F)/2$;

p est le nombre de faces qui contiennent le même sommet ($p > 2$)

$S = (nF)/p$;

A, F, S désignant le nombre d'arêtes, de faces, de sommets du polyèdre, nous avons :

$$F + S - A = 2$$

On peut écrire :

$$F + ((nF)/p) - ((n/2)F) = 2$$

ce qui équivaut à :

$$F (2p + 2n - np) = 4p$$

F et p sont des éléments de N*,

donc $2p + 2n - np > 0$

donc $p (2 - n) + 2n > 0$

$$p (n - 2) < 2n$$

On a alors la double inégalité suivante :

$$2 < p < (2n/(n-2))$$

Ce qui nous permet d'écrire, sachant que p est un entier naturel :

$$3 \leq p < (2n/(n-2))$$
$$3 \leq (2n/(n-2))$$
$$3 (n - 2) < 2n$$
$$3n - 6 < 2n$$
$$n < 6$$

D'aprés les hypothèses de départ, on vient de prouver que n ne peut prendre que les valeurs strictement plus petites que 6. Les valeurs prises par l'entier naturel n sont nécessairement : 3, 4, ou 5.

Par un raisonnement analogue, l'écriture 2n+2p-np étant symétrique en n et p, on obtiendrait que les seules valeurs possibles pour l'entier naturel p, sont : 3, 4, ou 5.

Nous pouvons maintenant, connaissant les valeurs à donner à n et p, déterminer les valeurs de F.

On utilise l'équation :

$$F\,(2p + 2n - np) = 4p$$
$$F = 4p/(2n+2p-np)$$
avec $2n + 2p - np \neq 0$

On peut obtenir les résultats donnés dans le tableau suivant :

valeur donnée à n	valeur donnée à p	*valeur obtenue pour F*	*Polyèdre*
3	3	4	tétraèdre
3	4	8	octaèdre
3	5	20	icosaèdre
4	3	6	cube
4	4	impossible car 2n+2p-np≠0	
4	5	impossible car 2n+2p-np<0	
5	3	12	dodécaèdre
5	4	impossible car 2n+2p-np<0	

On retrouve bien les cinq solides de Platon.

[NDLR :
Comme cela a été souligné lors des exposés oraux, cette démonstration établit que si un polyèdre est régulier, ce ne peut être que dans 5 cas ; il reste à vérifier que chaque cas correspond à un polyèdre régulier “existant”.]