Structures colorées

par Julien Cotte, Laurent Dumarchez, Laurent Eyriez, Laurent Tardif du Lycée Pablo Neruda de Saint Martin d'Hères.

enseignants : MM. Laurent Delgado et Jean-Claude Oriol

chercheur : M. Charles Payan, Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique de Grenoble.

Lors d'un cours de mathématiques en début d'année, le professeur nous a proposé de participer à MeJ en nous disant que ce serait une expérience intéressante et que cela nous permettrait de voir les mathématiques autrement. Intrigués, nous sommes allés voir, et nous voilà un an après pour vous présenter nos travaux.

Nous avons travaillé sur le problème centenaire des **quatre couleurs**. La première formulation de ce problème a été faite par l'écossais Francis Guthrie en 1852.

En voilà l'énoncé : *Peut-on colorier une carte avec 4 couleurs de façon que deux pays voisins soient de couleurs différentes ?*

Nous nous sommes imposés les restrictions suivantes :

— chaque pays n'est constitué que d'un seul bloc

— 2 pays voisins ont au moins une ligne frontière commune, c'est à dire, 2 pays qui se touchent en un seul point ne sont pas considérés comme voisins.

Travail sur des murs ou des figures régulières

Après avoir commencé nos recherches un peu dans tous les sens nous nous sommes rabattus sur une étue de figures géométriques beaucoup plus classiques.

<u>Loi de Julien 1</u>

Pour trouver combien d'additions font un nombre N (combien de a et b différents pour faire a + b = N)

Si N est pair, il y a N ÷ 2 additions
Si N est impair, il y a (N-1) ÷ 2 additions.

Par exemple nous avons colorié un pavage de triangles et vu que 2 couleurs suffisaient pour répondre au problème posé.

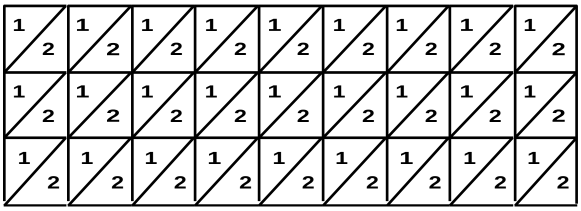


figure de L. Eyriez

Nous avons ensuite travaillé sur un “mur” composé de “briques” de différentes dimensions.

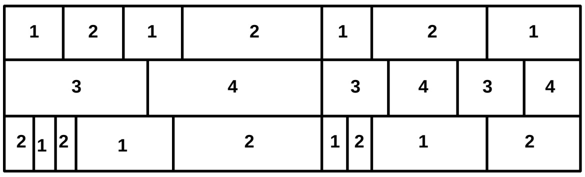


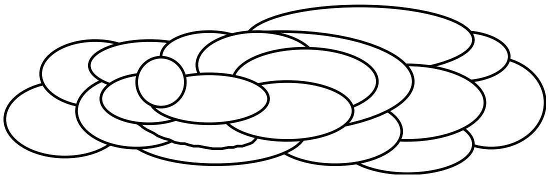
figure de L. Dumarchez

Par ce procédé et sur l'exemple précis, nous voyons bien que 4 couleurs suffisent pour colorier cette figure.

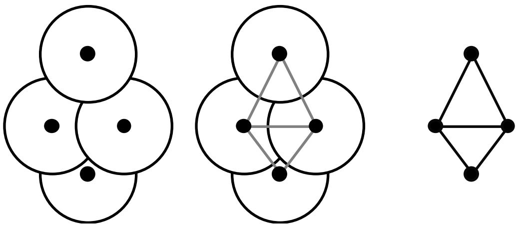
Nous avons malgré tout rapidement abandonné l'étude de ces figures géométriques puisqu'elles ne permettaient pas, à cause de leur simplicité, de jeter les bases d'un raisonnement fiable.

De la carte au graphe

Nous avons vu que nous pouvions réaliser des choses très intéressantes en utilisant des cartes dites “géométriques” (murs, pavages …). Mais nous nous sommes vite aperçus que cet “outil de travail” n'apparaissait pas suffisant pour pouvoir établir un commencement de théorie.



Par exemple, le coloriage sur cette figure apparaît très complexe. Nous devions donc trouver une autre forme de représentation pour pouvoir continuer notre recherche. C'est en face d'une figure de ce style qu'une idée lumineuse est apparue à un de nos membres. Nous travaillions sur une carte d'Europe, le 1er octobre 1991, quand nous avons pensé à remplacer chaque pays par sa capitale et à matérialiser chaque frontière par un segment reliant les capitales des deux pays concernés.



La figure de départ ne ressemble donc plus beaucoup au résultat. Pourtant les caractéristiques de cette schématisation permettent de poursuivre les buts que nous nous sommes fixés, à savoir :

— travailler sur une figure planaire

— trouver une hypothèse permettant d'affirmer que 4 couleurs suffisent pour colorier les capitales de façon que 2 capitales voisines soient de couleurs différentes.

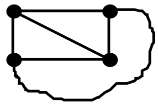
En outre, cet agencement apparaît être beaucoup moins “barbare” que la carte prise en exemple.

A partir de ce point de départ, nous sommes parvenus à des schématisations elles mêmes complexes qui nous permettaient de réfléchir.

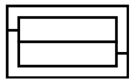
Nos premières découvertes.

Dès nos premières heures de travail, nous avons cherché à savoir si 5 pays pouvaient tous se toucher mutuellement. Ce problème a un rapport direct avec notre schématisation vue précédemment. En effet, une grande partie de ce problème réside là-dessus.

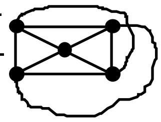
Si nous prenons un schéma à 4 pays, nous voyons que chaque pays peut toucher les 3 autres :



Ce que nous pouvons représenter par ce dessin :



Maintenant, si nous commençons avec 5 pays, la schématisation nous donne celà :



Pour que chaque pays possède 4 relations, il est obligatoire que 2 frontières se coupent. Or c'est impossible dans la réalité. Donc nous ne pouvons réaliser de dessin géométrique dans le plan réalisant cette condition.

Un de nous pense que ceci est une condition suffisante pour affirmer que le problème est résolu, puisque si nous rajoutons un point, il pourra prendre la couleur du pays "enfermé" par la frontière des 2 autres. A vous de juger. *[N.D.L.R. : ce point n'a jamais pu être vraiment éclarci malgré un contre-exemple donné pour le cas de 3 couleurs : un point relié aux 5 points d'un cycle 5]*

Nous avons aussi remarqué que si sur la carte, il partait de chaque nœud (intersection de plusieurs zones) un nombre pair de pays, alors la figure était coloriable en 2 couleurs. *[N.D.L.R. : ce résultat donné sans démonstration contient deux des premiers théorèmes de la Théorie des Graphes, théorèmes qui sans être difficiles ne sont pas complètement triviaux.]*

Dès que notre schématisation fut mise au point, nous nous sommes attachés à chercher des relations entre le nombre de pays et le nombre maximum de frontières.

Après quelques semaines de recherche et “un peu de chance”, nous avons trouvé une formulation de U_n, nombre maximum de frontières *[N.D.L.R. : d'une carte à n pays].*

U_n est une suite arithmétique telle que :

$U_0 = 0$ $U_1 = 1$ $U_2 = 1$

et pour tout $n \geq 3$:

$U_n = 3n - 6$ ou $U_{n+1} = U_n + 3$

Ce qui nous permet de déterminer à partir du nombre de pays le nombre maximum de frontières possibles entre ces pays. Par exemple, sur un schéma à 7 pays il ne peut y avoir que 15 relations ou frontières car :

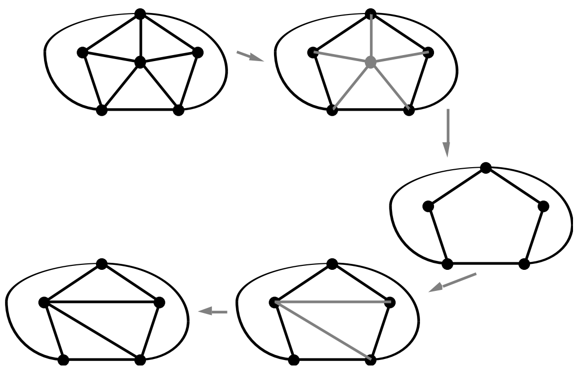
$U_7 = 3 \times 7 - 6 = 15.$

Enthousiasmés par notre découverte, nous nous sommes mis à la recherche d'une relation entre le nombre de domaines *[N.D.L.R. : du schéma]* et le nombre de pays ; avec du travail et encore “un peu de chance”, nous avons trouvé une autre suite $D_n = 2n - 4$

Nous avions la certitude que ces suites étaient bonnes mais nous n'avions point de démonstration *[N.D.L.R. cette remarque donne sans doute à réfléchir sur le rôle de la démonstration dans l'enseignement]*.

C'est à ce moment-là que nous avons remarqué que lorsque nous enlevions un point et ses relations dans un schéma et que nous rajoutions toutes les nouvelles relations possibles, nous n'avions perdu au total que 3 relations. *[N.D.L.R. : un bel exemple de récurrence, raisonnement que des étudiants ne considèrent pas comme familier même après plusieurs années d'Université.]*

Exemple :



Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$U'_{n-1} = U_n - 3$

Loi de Hanane 3

On peut partager en 2 tous les nombres pairs, parce qu'ils sont dans la table de 2.

En utilisant les propriétés sur les suites arithmétiques nous arrivons à :

$U'_n = 3n - 6$ d'où U_n

[N.D.L.R. : quel rôle joue la notation U'_n ?]

Donc notre suite initiale était bonne (ouf).

Quelques séances plus tard nous apprîmes l'existence d'une relation liant :

— le nombre de domaines D_n
— le nombre de frontières U_n
— le nombre de pays n

Après quelques manipulations nous sommes arrivés à : $D_n + n - U_n = 2$

Nous apprîmes plus tard que nous venions de retrouver la formule d'Euler.

C'est à ce moment-là que nous nous sommes rappelé que nous n'avions pas démontré D_n. En supposant la formule d'Euler vraie (ce que nous n'oserions pas contredire) et notre découverte U_n nous pouvons retrouver D_n

$$D_n + n - U_n = 2$$
$$\Rightarrow D_n + n - (3n - 6) = 2$$
$$\Rightarrow D_n = 2n - 4$$

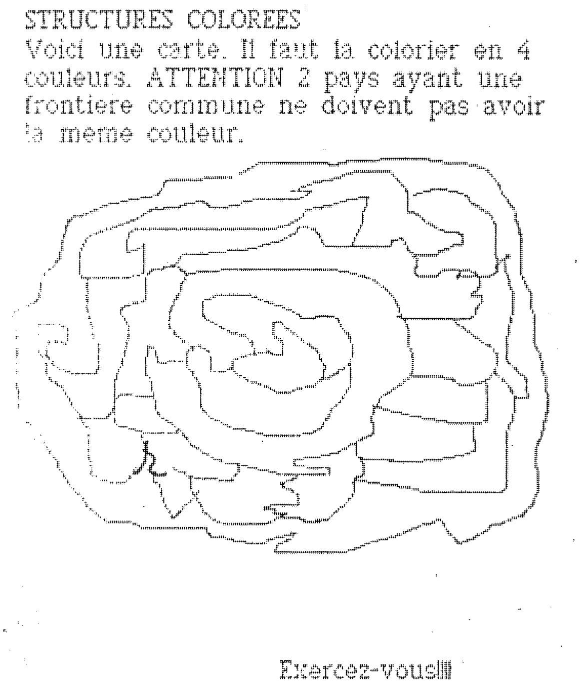
[N.D.L.R. : les élèves n'ont pas remarqué qu'il était équivalent de calculer U_n et D_n. Il est intéressant de mentionner qu'ils font une preuve en s'appuyant sur une hypothèse : un résultat supposé vrai.]

Nos chaînes.

N.D.L.R. : Les élèves rajoutent ici un paragraphe où ils présentent des “résultats” trouvés lors de la rédaction du texte et hors Math en Jeans.

Ils “constatent” que tout schéma planaire maximal est partitionable en deux chaînes. Chacune étant coloriable en 2 couleurs ils en déduisent que …
*« **toutes les figures à U_n relations sont coloriables en 4 couleurs donc toutes les figures sont coloriables en 4 couleurs** ».*

Alors qu'ils connaissaient toute la difficulté du problème la rapidité de la “preuve” n'a pas l'air de les étonner … Terminons sur cette note plus gaie, un exercice proposé par les élèves, ci-contre.



En 1992, le tout premier congrès européen de mathématiques avait lieu à Paris. Pour cette occasion exceptionnelle, le congrès “MATh.en.JEANS” a eu un frère : le

“Congrès Mathématique Junior”,

du 6 au 8 juillet, à la Cité des Sciences et de l'Industrie,

qui vit — entre autres — la rencontre de plus de 200 lycéens et de leurs professeurs avec plus de 100 chercheurs en mathématiques.

Nous avons le plaisir d'annoncer que les compte-rendus de ce Congrès Junior paraîtront fin 1993 aux Editions du Choix sous le titre :

“Jeunes sur la Planète Maths”

avec aussi bien les exposés des jeunes que ceux des chercheurs confirmés.

Pour être informé de la date de parution et du contenu, envoyez une enveloppe timbrée avec votre adresse à :

CMJ - 50 Lycées
UFR de Maths
2 place Jussieu
case 7012
75251 Paris Cedex 05