Reversi.

par Matthieu Benbassa, Laurent Farcy, Jean-Michel Guéroult, Muriel Jeandenand, Isabelle Nave, Christophe Netillard
du
Lycée Corneille de Rouen

enseignant : M. Jean Toromanoff

chercheur : M. Daniel Krob, Laboratoire d'Informatique de Rouen.

Sujet de recherches : Othello (Reversi). Othello étant un jeu à deux joueurs, fini, nos recherches se sont essentiellement portées sur l'élaboration d'une stratégie gagnante, ou au moins (le but étant extrêmement ambitieux) d'améliorer le plus possible les chances de gagner d'un des joueurs.

Plan des recherches :

I.— Introduction
Généralités

— Jeu fini
— Arbre d'un jeu fini
— Stratégie gagnante
— Résultat préliminaire : déterminisme

Othello

— Règle du jeu
— Etude du premier coup
— Généralités
— Arbre du jeu

II.— Analyse 4 x 4

A — Dénombrements sur l'arbre
B — Heuristique de jeu
— Réductions du jeu
C — 4 x 4 sans coins
D — grille en croix
E — Stratégie gagnante
— Analyse rétrograde

III.— Analyse 8 x 8

— et sur 8 x 8 ?

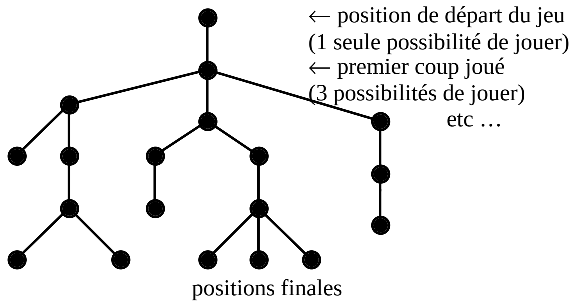
I— Introduction.

Le jeu fini.

C'est un jeu qui reste bloqué à partir d'un certain nombre de coups (d'une façon ou d'une autre).

L'arbre d'un jeu fini.

exemple d'arbre d'un jeu imaginaire fini :



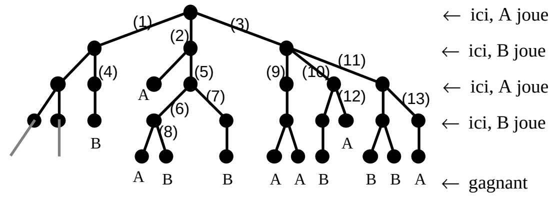
Stratégie gagnante.

Ce sont des directives de jeu pour un joueur qui joue sur l'arbre des parties de façon à ce que toutes les positions finales soient gagnantes pour ce joueur.

Résultat préliminaire :
déterminisme dû à la connaissance de l'arbre

Si les deux joueurs connaissent parfaitement l'arbre du jeu et qu'ils jouent pour gagner (ou au moins ne pas perdre), on sait qui a gagné avant même de jouer si on connait le joueur commençant.

Exemple :



— Branche (1) : B va jouer en (4) pour gagner → A ne choisit pas (1).
— Branche (2) : B va jouer en (5) pour ne pas perdre ; si A joue en (7), il perd, s'il joue en (6) B joue en (8) et A perd encore ! → A ne choisit pas (2) sinon il perd.

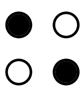
— Branche (3) : B ne joue pas en (9) car il y perdrait ; B ne joue pas non plus en (10) car il y perd aussi (car A jouerait en (12)). Il reste (11) mais il y perd aussi car A joue en (13) pour gagner. Quoi qu'il arrive, B perd par la branche (3) → A choisit (3) et gagne (la partie n'a pas eu le temps de commencer !).

A fortiori, si seul l'un des joueurs connait l'arbre, si une stratégie gagnante existe pour lui, il gagne !

Et Othello ?

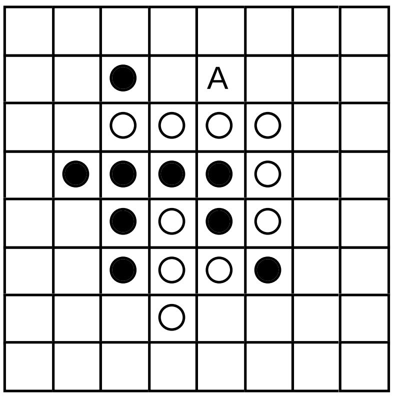
Règle du jeu.

Il faut poser un pion de sa couleur pour encadrer un ou plusieurs pions de couleur adverse et on les retourne (les pions sont réversibles : une face blanche, une face noire). Position de départ : au centre de la grille 8 x 8 cases :

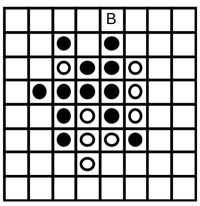


les blancs commencent …

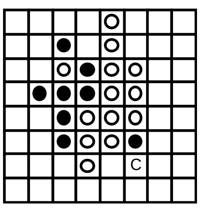
Exemple : (16ème coup au 18ème)



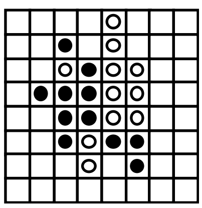
Les noirs jouent en A



Les blancs jouent en B



Les noirs jouent en C



<u>Loi de Nicolas 1</u>

$5 \div 2 = 2$ r 1

$8 \div 3 = 2$ r 1

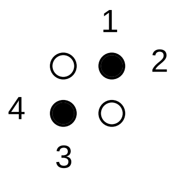
$11 \div 2 = 2$ r 1

$13 \div 2 = 2$ r 1

$14 \div 2 = 2$ r 1

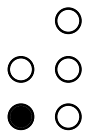
$(3 \times N - 1) \div N = 2$ r 1 *(voir page 166)*

Etude du 1er coup du joueur commençant.

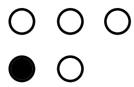


Position de départ : les blancs peuvent jouer en 1, 2, 3 ou 4.

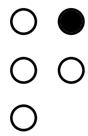
En 1 :



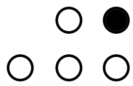
En 2 :



En 3 :



En 4 :



On s'aperçoit que l'on peut passer d'un tableau à l'autre par symétrie ou rotation. Les blancs n'ont en fait qu'une seule et même possibilité et non pas 4 différentes. Le premier coup peut donc être fixé.

Généralités sur le jeu.

On constate dans la pratique que les coins ont une grande valeur stratégique (surtout en début de partie) : une fois qu'un pion y est posé on ne peut plus le retourner ; or il domine deux lignes importantes et une diagonale.

De très grands retournements de situation sont possibles tout le long d'une partie.

Arbre du jeu.

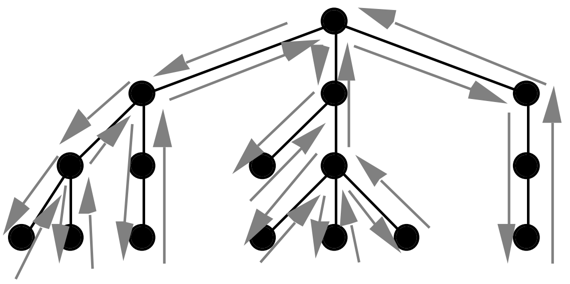
On constate lorsque l'on commence l'arbre du jeu, qu'il prend rapidement une ampleur gigantesque. On commencera donc l'étude par une réduction du jeu à 4 x 4 cases au lieu de 8 x 8.

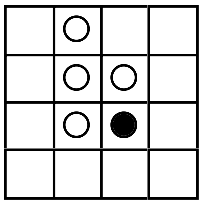
II.— Analyse 4 x 4

A.— Dénombrements sur l'arbre,
Résultats sur ordinateur.

Nous avons réalisé un programme en Turbo-Pascal utilisant l'algorithme du back-tracking. Le principe en est le suivant :
On va explorer l'arbre du jeu intégralement. A chaque nœud de l'arbre, on choisit arbitrairement de commencer par une branche. Arrivé au bout d'une branche, on remonte ensuite au nœud précédent. On explore de la même manière toutes les autres branches.

Exemple de parcours effectué sur un arbre imaginaire :





On fixe le premier coup (on évite ainsi les 4 symétries de départ). L'ordinateur dénombre alors 15 015 parties possibles.
En ajoutant les symétries initiales, il y a donc 4 x 15 015 = 60 060 parties possibles.

Parties gagnées :

— par les Blancs :	6 158, soit 41 %
— par les Noirs :	7 529, soit 50,1 %
Parties nulles :	1 328, soit 8,9 %
Parties bloquées :	1 620, soit 10,8 %

Score minimal obtenu pour une partie nulle:7
Minimum de coups pour une partie : 6.

B.— Heuristique de jeu :
Comment améliorer ses chances de gagner ?

Généralités.

Etant donnée la taille de l'arbre, même sur 4 x 4, il faut, pour jouer, trouver un moyen de le réduire. Evidemment, on cherche à gagner, donc on ne peut pas le réduire n'importe comment → Il faut trouver une règle de jeu (une stratégie) qui “élague” cet arbre en enlevant le plus de branches perdantes (pour le joueur appliquant cette stratégie) possible … voire toutes (cas de la stratégie gagnante !).

Il faut donc créer une règle simple (d'utilisation) tenant compte des aspects stratégiques du jeu. Or on sait le rôle prépondérant des coins et des côtés (surtout à 4 x 4).

Construction d'une stratégie :
Principe de la pondération des cases.

L'idée est d'affecter à chaque case de la grille de jeu (on se limité toujours à l'étude 4 x 4 cases) un coefficient correspondant à son importance dans le jeu : sa valeur en quelque sorte.

Pour que ces coefficients s'appliquent à quelque chose, on confère aux pions une valeur unitaire, opposée avec la couleur :

Pion blanc ↔ + 1

Pion noir ↔ - 1

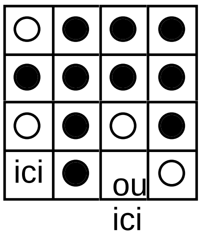
et le pion sur une case donnée prend donc une valeur proportionnelle au coefficient de cette case.

Exemple de pondération “judicieuse” :

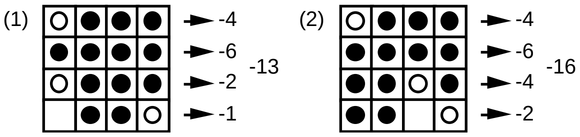
x 3	x 2	x 2	x 3
x 2	x 1	x 1	x 2
x 2	x 1	x 1	x 2
x 3	x 2	x 2	x 3

Application :
— Un pion blanc dans un coin vaut + 3 points, un noir vaut - 3 points, etc …
— On additionne l'ensemble des points sur le plateau pour chaque possibilité de jouer que l'on a.
— Enfin, on joue effectivement le coup qui confère le nombre de points maximum au tableau (positifs pour les Blancs, négatifs pour les Noirs).
— En cas d'égalité de deux tableaux : recommencer la procédure aux coups suivants et trancher !

Exemple :



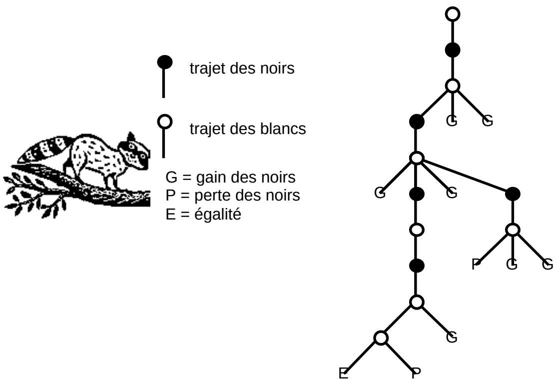
Les Noirs doivent jouer.



Le coup (2) est meilleur pour les Noirs → c'est celui qu'il faudra jouer.

Résultats.

L'exemple donné n'est malheureusement pas une stratégie gagnante, mais … il offre 17 chances sur 18 de gagner pour les Noirs (2nd joueur). L'arbre est sérieusement réduit :



Avantages.

La méthode est relativement facilement applicable pour jouer. Elle peut s'étendre à 8 x 8 mais la pondération serait bien plus délicate à établir et il n'est pas évident que les résultats soient aussi intéressants (une stratégie de pondération est un peu simpliste comparée à la "subtilité" du jeu à 8 x 8).

Il est facile de faire un programme qui permet, en faisant varier les coefficients de pondération, de trouver les valeurs donnant une stratégie optimale (en cours d'élaboration !).

<u>Loi de Rhaled 1</u>

On peut changer la loi de Manuel pour faire une nouvelle loi :

N + (2 x N) + (3 x N) + (4 x N) + (10 x N) = 20 x N

C.— Réduction du jeu :
tableau 4 x 4 sans les coins.

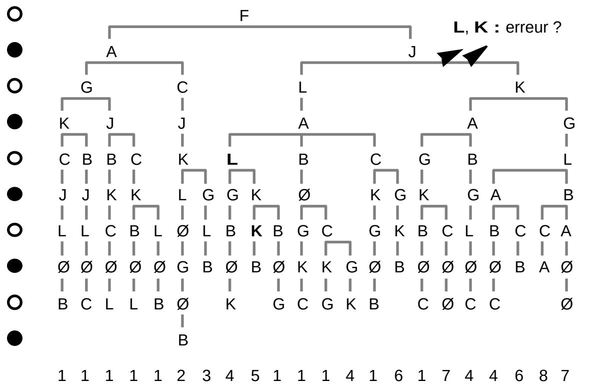
Cette étude permet de considérer un arbre dans son intégralité et d'analyser des phases de jeu sans faire intervenir les coins, qui sont des cases dont l'importance stratégique n'est plus à démontrer.

Numérotation des cases :

	A	B	
C	D	E	F
G	H	I	J
	K	L	

Départ : cases blanches : D, I ; cases noires : H, E

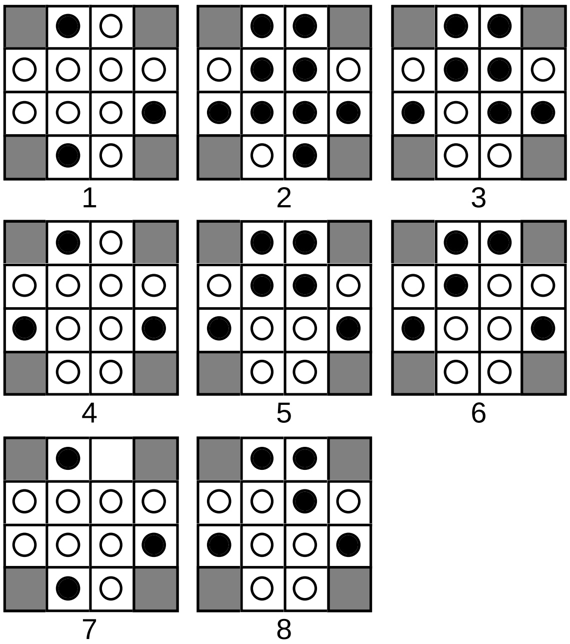
Dans l'arbre, les lettres désignent la case où l'on dépose un pion, dont la couleur est précisée à gauche. Ø = le joueur passe.



(le numéro indiqué est celui du tableau auquel il faut se reporter, page suivante)

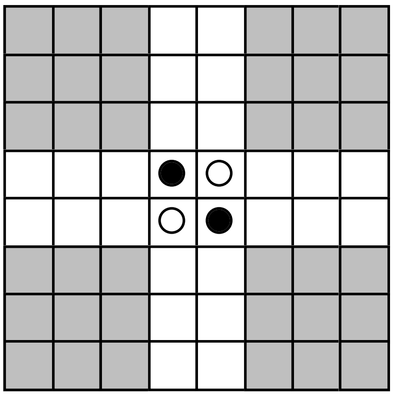
Analyse :
— sur 22 parties, 19 ont été gagnées par les Blancs (86,5 %), 2 par les Noirs (9 %) ; il y a eu une partie nulle (4,5 %). Donc, contrairement à la partie "normale" (tableau 4 x 4) c'est le premier joueur qui a plus de chances de gagner.

— On dénombre seulement 8 types de tableaux finaux :



D.— Grille en croix : réduction de la surface de jeu 8 x 8 à une croix.

La réduction.



Nous nous sommes intéressés à une réduction du jeu à une croix, c'est-à-dire que nous avons enlevé du 8 x 8 les carrés de 9 cases aux 4 coins.

Le but.

Après de nombreuses parties de Reversi sur un jeu normal, nous nous sommes aperçus que les coins devaient avoir un grand rôle ;

c'est pourquoi nous les avons supprimés, pour voir si cette importance était justifiée. De même, nous avons enlevé les cases entourant ces coins (cases à éviter si on ne veut pas que l'autre joueur prenne le coin) ainsi que les cases entourant ces dernières (coups stratégiques dans l'intention d'obtenir les coins).

Essai d'arbre.

Nous aurions pu penser, du fait du jeu réduit, que l'arbre serait faisable à la main, mais nous avons abandonné à cause de sa longueur.

Observations et interprétation.

Ayant réalisé le plus possible de branches de l'arbre, nous sommes arrivés au constat suivant : le premier joueur gagne plus souvent que le second car ce dernier passe pratiquement toujours à trois coups de la fin de la partie et ne peut plus jouer.

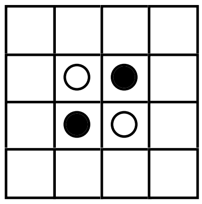
Or nous savons que sur un jeu 8 x 8 classique, c'est le second joueur qui a le plus de chances de l'emporter. Les coins ont donc un important rôle sur le déroulement de la partie : ce sont eux qui font gagner le premier joueur ; le second joueur perd par leur absence car il arrive un moment où il ne peut plus jouer.

E.— Stratégie gagnante pour le deuxième joueur sur 4 x 4.

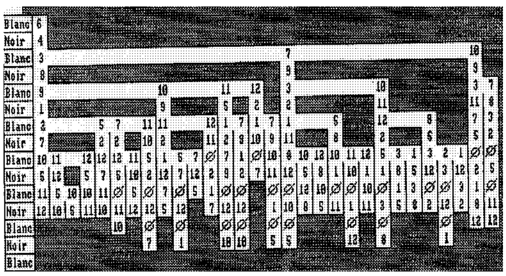
Codification du damier :

1	2	3	4
5			6
7			8
9	10	11	12

Position de départ :



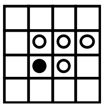
Les Blancs commencent.

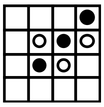


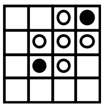
(voir aussi page 130.)

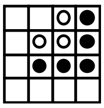
Ø = le joueur ne peut pas jouer.

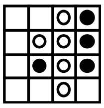
Nous avons cherché à réduire la taille du damier. Mais nous avons cherché aussi à réduire la taille de l'arbre. Un arbre étudie tous les coups possibles pour chaque joueur. Etant l'un des deux joueurs, au lieu d'étudier toutes les possibilités que nous avons, nous n'en avons étudié qu'une seule. Nous nous sommes aperçus que le deuxième joueur, ayant la possibilité de prendre un coin dès son deuxième coup, a plus de chances de gagner sur un damier 4 x 4. Donc nous avons étudié toutes les possibilités du premier joueur et pour chaque coup que celui-ci a joué, nous avons fait jouer le deuxième joueur à l'endroit qui nous paraissait le plus stratégique. Sachant qu'à cause des rotations, le premier joueur n'a pas le choix, le premier coup peut être fixé. Prenons un exemple :

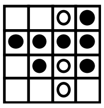

Le premier joueur joue en 6.

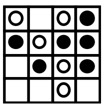

Le deuxième joueur joue en 4.

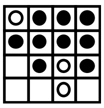

Le premier joueur peut jouer en 3, 7 ou en 10. Il joue en 3.

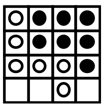

Le deuxième joueur joue en 8.

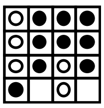

Le premier joueur peut jouer en 9, en 10, en 11 ou 12. Il joue en 11.

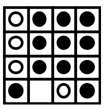

Le deuxième joueur joue en 5.

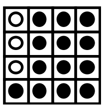

Le premier joueur peut jouer en 1 ou en 7. Il joue en 1.


Le deuxième joueur joue en 2.


Le premier joueur ne peut jouer qu'en 7.


Le deuxième joueur joue en 9. Le premier joueur ne peut pas jouer.


Le deuxième joueur joue en 12. Le premier joueur ne peut pas jouer.


Le deuxième joueur joue en 10. Le deuxième joueur a gagné !!!

<u>Loi de Rémi 3</u>

Dans les divisions, si on en fait une, et après une autre qui est le double, ça ne change pas le résultat.

$$A \div B = (2xA) \div (2xB)$$

Analyse rétrograde.

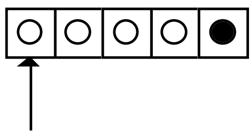
BUT :

Totaliser le nombre de tableaux possibles antérieurs à une configuration donnée (quelconque).

DEMARCHE.

On analyse pour chaque pion du tableau s'il a pu être joué au coup précédent.

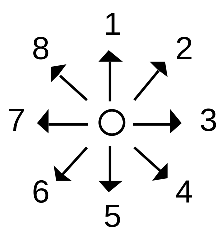
Analyse unidirectionnelle :



Sachant que pour qu'un pion ait été retourné, il faut au moins que sur une ligne, il se trouve dans une tierce de pions de sa couleur, le pion blanc joué ici a pu retourner 0, 1 ou 2 pions noirs.

En généralisant, on s'aperçoit que dans une direction, le nombre de configurations linéaires précédentes est égal au nombre de pions blancs situés après celui considéré (jusqu'à un pion noir).

Généralisation :



Sur le plateau, on va devoir regarder, pour un pion, dans huit directions (en général) ⇒

$$n_p = \prod_{i=1}^{8} k_i - 1 \leftarrow$$ possibilité où l'on ne retourne rien

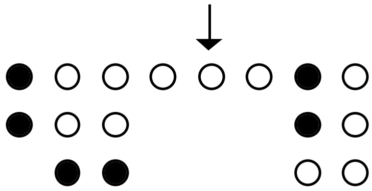
k_i étant le nombre de pions sur la direction i.

On utilise le symbole de Krönecker pour "arranger" la formule :

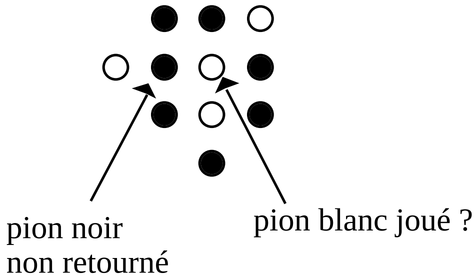
$$\boxed{n_p = \prod_{i=1}^{8} \left[\delta_{k_i 0} + k_i\right] - 1} \text{ pour 1 pion.}$$

On additionne pour chaque pion blanc les n_p. On obtient le nombre total théorique de tableaux possibles précédents.

Limites de la formule : on se rend vite compte que la formule renvoie dans certains cas des valeurs > 0 alors que le pion n'a pas pu être joué.



On ne peut pas séparer 2 blocs.



Ce pion noir aurait été retourné.

III.— Analyse 8 x 8

Et sur 8 x 8 ?

Sur 4 x 4, on pouvait supposer que la croissance de l'arbre n'allait pas être trop importante. On constate en effet que les nombres obtenus restent abordables et les temps de calcul très raisonnables (quelques heures sur un micro-ordinateur usuel). Par contre, sur 8x8, en supposant qu'à chaque coup un joueur a le même nombre de possibilités de jouer que sur 4 x 4 (environ 2,7 en moyenne), on atteint tout de suite $2{,}7^{59} \approx 4{,}27 \times 10^{25}$ parties différentes (1^er^ coup fixé). Et en supposant qu'une partie est exécutée tous les millièmes de seconde (sur un bel ordinateur !), il faudrait 1 355 millions de millions d'année ($1{,}35 \times 10^{15}$) pour les faire toutes. Or, le nombre moyen de possibilités n'est pas 2,7 mais environ 6,5 ! Il y a donc $6{,}5^{59} \approx 9{,}2 \times 10^{47}$ parties possibles (9 … 2 … et 46 zéros derrière !) et même avec un ordinateur 10^{15} fois plus puissant il faudrait encore $2{,}9 \times 10^{22}$ années de calcul (bien plus (!) que l'âge estimé de l'univers).

Que conclure ? Qu'il est impossible de gagner à chaque fois ? Sûrement pas. Il faut simplement trouver un moyen efficace de réduire l'arbre en augmentant ses chances de gagner. Cependant, tout le problème réside dans la construction de cette règle (la pondération est un peu simpliste). Si une stratégie gagnante était si simple à trouver, les clubs d'Othello nationaux et mondiaux seraient bien embêtés !!! Mais ne nous laissons pas abattre !! …