Le projet MARCHE

[rapport présenté à l'Assemblée Générale de l'AMeJ le 1er février 1992,

par Gérard Duchamp, Laboratoire d'Informatique de Rouen.]

Description de l'expérience

Le projet a débuté le 6 novembre 1991 et 11 séances ont eu lieu depuis. Voici comment sont organisées les séances :

La classe, qui compte 37 élèves, est divisée en 11 groupes dont voici la répartition :

nombre d'élèves	3	4	5
nombre de groupes	8	2	1

Chaque groupe a choisi un sujet parmi 8 proposés en début d'année. Il nous a paru judicieux de prendre un prétexte qui, tout en étant central dans les mathématiques contemporaines, avait de multiples points de rencontre avec le programme. Il s'agit en gros de mathématiques discrètes et de combinatoire géométrique : les sujets ont trait au plan et à l'espace avec application à l'algèbre (PGCD, transformation des polynômes trigonométriques …), à l'arithmétique (combinatoire des "fortunes"), à l'analyse (approximation des mesures d'angle) et à la logique (apprentissage du raisonnement). Je reviendrai sur la question du raisonnement dans ma conclusion.

Le professeur de cette classe est P. Audin et j'agis en tant que chercheur. La structure est donc la même que celle de "MATh.en. JEANS" à trois différences près qui transforment très notablement l'expérience :

a) Tous les élèves sont concernés (alors que "MATh.en.JEANS" est fondée sur un consentement mutuel des acteurs).

b) L'horaire est limité (2 heures) ce qui est insuffisant pour gérer des évènements spontanés (conversation longue et approfondie avec un groupe ou une partie d'un groupe par exemple).

c) Les sujets et les développements sont contraints par le programme. (La nécessité de faire un travail qui "rapporte" à courte échéance est structurante, mais entraîne aussi une certaine superficialité ➥ intégration.)

Ces raisons, à mon avis, diminuent notablement la qualité du travail.

(…)

Il est intéressant aussi de voir quand plusieurs opérations ne changent pas un résultat ; la loi de Hanane est formulée différemment mais dit la même chose ; y a-t-il d'autres exemples que celui de Rémi et Hanane ?

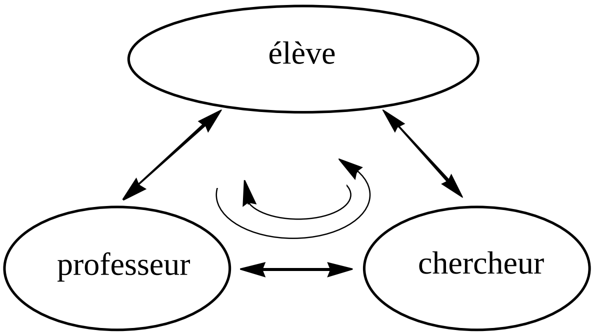
Bilan

L'expérience a, à la fois, agi comme un **atelier** et comme une **consultation.**

Les points positifs sont :
a) premier contact avec des méthodes actives dans une structure modifiée ;
b) apprentissage du raisonnement, gestion et dépassement des "évidences".

et les aspects les plus discutables :
a) peu de travail visible (en comparaison d'une production "dopée" par un encadrement plus "activiste") mais plus de travail en profondeur (questionnement ?) ;
b) manque de temps dans les séances.

Côté atelier : Les élèves sont mis en face de leurs propres ressources non pas à *reproduire* mais à *chercher* — je veux dire à la fois à *re - chercher* (lecture de documents) et à *créer* (production de solutions, de structures, émission de conjectures). Le professeur agit en tant que directeur pédagogique (il sait bien comment fonctionne un jeune, et les classes) et le chercheur en tant que directeur de recherches (il indique des directions, valorise certaines idées dont il sait — ou sent —



qu'elles sont à longue portée) … les rôles ne sont pas figés. Chacun des pôles peut prendre le rôle de l'autre à condition que ce soit "fonctionnel".

Côté consultation : Le changement de cadre révèle de façon répétée (récurrente) les dysfonctionnements du système éducatif actuel (ce qui n'est nullement une critique destructive de celui-ci puisqu'aucun système n'est parfait). Je voudrais ici illustrer cette observation par un point qui me tient à cœur : l'apprentissage du raisonnement.

Les mathématiciens savent que leur science se développe à l'intérieur d'un système logique bien précis : le système ZF (Zermelo-Frankel). Les contours de ce système sont assez bien délimités par :

a) la logique ;

b) les principes de base (axiomes) de la théorie des ensembles.

Sur ce système (et donc à l'intérieur de lui) les mathématiques sont comme un arbre dont les branches maîtresses sont l'analyse, l'algèbre, l'arithmétique, et depuis peu, jeune branche mais déjà porteuse de nombreux rameaux, la combinatoire.

La logique, qui est notre outil de travail quotidien, est faite :

a) d'objets (les symboles, les constructions) ;

b) de règles ou méthodes de raisonnement (à l'heure actuelle, un raisonnement est vu, grosso modo, comme l'affichage des résultats d'un programme informatique dont les constructions permises sont définies par une véritable *grammaire*).

Or les contenus de l'enseignement actuel rejettent d'une main (comme étant hors programme) l'apprentissage de la logique pour demander de l'autre que les élèves sachent raisonner.

D'où un énorme malaise ressenti par les élèves à qui on demande de savoir raisonner sans leur en avoir donné les moyens [ce qui reviendrait à demander à quelqu'un d'avoir une orthographe correcte sans lui donner de règles de grammaire, à des musiciens de jouer de la musique classique sans leur avoir donné les premiers rudiments d'une gamme, ou à envoyer sans outils un ouvrier sur un chantier].

Tous ceux qui ont un souci parental vis à vis des jeunes ainsi que tous les mathématiciens à qui on a, autrefois, donné une technique solide, ne manqueront pas de se sentir, comme moi, concernés par cette situation.

On ne peut que souhaiter *à l'intérieur même du corpus des programmes*, sous une forme ou l'autre, un *apprentissage minimum de la logique* (1).

Conclusion

Même si MARCHE n'est pas une méthode aussi puissante que "MATh.en.JEANS", pour les raisons que je viens de citer, qu'on ne sous-estime pas l'utilité de cette forme d'expérience (ou, pour parler le langage du commerce et des banques, de ce "produit"), il permet un travail différent, approfondi : cependant, comme tout travail de ce type, il est lent en apparence et ne saurait se substituer à un cours surtout si celui-ci a des objectifs superficiels trop précis.

(1) Ceci n'est pas un retour en arrière. On peut choisir un exposé comme ceux destinés aux automaticiens (loi de de Morgan, systèmes complets) ou aux informaticiens (constructions formatives).

Mathématiques : Activité de Recherche en Classe, Historique et Epistémologique

1. Motivations : Donner aux élèves le goût de faire des maths, leur donner l'idée de ce que sont les méthodes des maths actuelles, leur donner l'idée des concepts mathématiques, leur apporter une meilleure maîtrise *autonome* du programme et une meilleure compréhension de son utilité, et ceci au moyen d'une authentique activité de recherche.

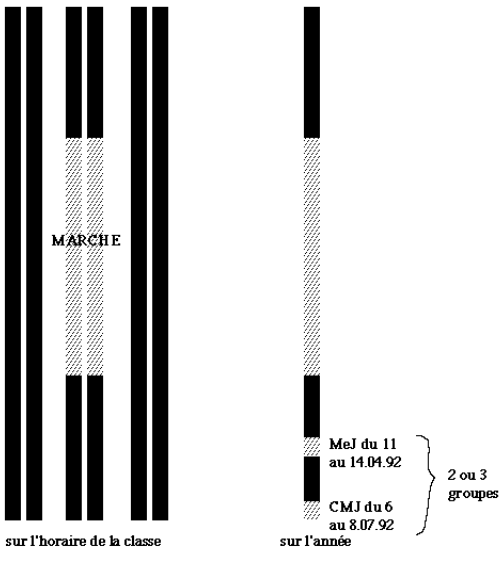
2. Cadre de l'expérience

2.1. *constitution d'"équipes de recherche"* : groupes de 3 ou 4 élèves. Ces équipes devront assurer un travail autonome, encadré par l'enseignant en collaboration avec un chercheur professionnel : M. Gérard Duchamp.

2.2 *découpage de l'année*

— constitution des équipes et choix des sujets traités par chacune d'elles : de septembre à la Toussaint.

— travail de recherche : de Toussaint à février, à raison de 2 heures de travail en équipes par semaine (voir 3.1.). Les 6 heures de la dernière semaine complète de février (les 25, 26 et 27) seront consacrées à la présentation en séance plénière de l'ensemble des travaux de l'ensemble des groupes. Le coût horaire est donc de 2 heures par semaine pendant 13 semaines et de 6 heures soit 32 heures prises sur l'emploi du temps de la classe, ce qui fait une moyenne annuelle d'environ une heure par semaine.



L'objectif est de parvenir à présenter au moins deux contributions de qualité au Congrès MATh.en.JEANS, du 11 au 14 avril 1992, au Palais de la Découverte, et au Congrès Mathématique Junior (CMJ), du 6 au 8 juillet 1992, à la Cité des Sciences et de l'Industrie. En ce qui concerne les équipes "sélectionnées", leur participation au Congrès MATh.en.JEANS et au Congrès Mathématique Junior donnera lieu à une préparation hors temps scolaire, combinée (si possible) avec les groupes MATh.en.JEANS de l'établissement.

2.3. Le travail de *chaque* équipe de recherche devra être consigné dans une brochure à petite diffusion.

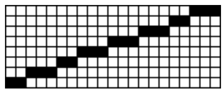
NDLR : la brochure, avec commentaires de l'enseignant et du chercheur, est parue.

Loi de Julien 2 :

C'est bien d'avoir pensé à la retenue ! Est-ce qu'il y a d'autres nombres que 11 pour lesquels la multiplication soit facile à effectuer ?

2.4. Sujets de recherche proposés à partir de la géométrie du pixel.

➥ Le plan discret 1.
(points à coordonnées entières).
La géométrie des images d'ordinateur : qu'est-ce qu'une droite, une courbe ? Par deux pixels passent combien de droites ?



Ceci est-il un segment vu par ordinateur ? Comment reconnaître un convexe ? Les sommets d'un polygone régulier peuvent-ils être à coordonnées entières ?

➥ Le plan discret 2.
pixels, échelles.
Avec des pièces de 5F et 2F, quels sont les montants que l'on peut payer sans possibilité de rendre la monnaie ? Nombre de façons de le faire ? Nombre de pièces au minimum pour chaque montant possible ? Avec des pièces de a et b F, quel est le plus grand montant qu'on ne puisse pas payer ?

➥ Pythagore
Validité sur la sphère, dans le plan, dans le plan discret ? Démonstration correcte dans le cas du plan. Quels nombres entiers sont sommes de 2 carrés ? Quels sont les triangles rectangles dont les sommets sont à coordonnées entières ? Triplets pythagoriciens: solutions en nombres a, b, c entiers de l'équation $a^2 + b^2 = c^2$.

➥ Polyèdres. (2 groupes)
Mesure des côtés de l'icosaèdre / du dodécaèdre ; construire une projection plane de l'icosaèdre ; en sommets à coordonnées entières ? Si on déplie un polyèdre dans le plan, peut-on avoir tous les sommets entiers ?

➥ Inéquations : programmation linéaire.
condition pour qu'il y ait une solution entière dans la région des solutions d'un système d'inéquations ?

➥ Surface, longueur, volume. (2 groupes)
Mesures / calculs de longueurs dans le plan discret, influence ou non des échelles, comparaison avec les longueurs dans le plan euclidien.
Mesures / calculs de surfaces dans le plan / dans le plan discret, influence des échelles, maîtrise de l'erreur commise dans l'approximation. Aire d'un polygone à sommets entiers ? Aire maximum pour un périmètre donné ?
Extensions aux volumes.

➥ Transformations géométriques du plan
(affines ou non).
Transformations usuelles dans le plan discret ; comparaisons avec le plan euclidien. Transformations moins usuelles dans le plan euclidien et dans le plan discret.
Pavages du plan avec des quadrilatères à sommets entiers.
Une courbe discrète quelconque joint 2 points ; peut-elle être le bord d'une pièce pavante ?

➥ Suites géométriques et arithmétiques.(2 groupes)
Correspondance entre les deux types, addition et multiplication (règle à calcul). Vitesses de convergence. Suites récurrentes. Trouver une courbe qui passe par tous les points entiers d'un rectangle ; quelle est sa longueur ?
Jeu du solitaire infini.

3. Moyens mis en œuvre

ROLES DE L'ENSEIGNANT ET DU CHERCHEUR
L'enseignant se tait. Même si les élèves se fourvoient dans de fausses pistes ou des contre-sens, il n’est pas question de leur apporter la bonne parole ou “le” résultat “juste” sous prétexte de ne pas les laisser dire de bêtises : l'erreur est objet d'intervention pédagogique, c'est le moteur de la démarche scientifique, et le point de départ d'une vraie communication entre les élèves d'un groupe, entre les groupes. L'enseignant est donc auprès des élèves, mais s’abstient de donner des réponses, au sens habituel qu’on peut donner à ce terme : nous les mettrons sur une piste, nous leur proposerons des directions qu’ils prendront ou pas. D’autres fois, nous irons à leur rencontre, posant nous-mêmes des questions, pour les obliger à affiner leurs réponses, ou les amener à envisager des situations auxquelles ils n’ont pas pensé, ou pour lesquelles leurs réponses sont incomplètes.
Présent dans la classe ou non, le chercheur assurera un suivi régulier du déroulement du travail (concertation téléphonique avec le professeur, participation à plusieurs séances MARCHE)

CONTRAT
Règle 1 : Nous sommes là pour chercher ensemble sur des sujets bien définis, discutés en commun.
Règle 2 : Qui dit recherche dit *équipe* de recherche. Nous fonctionnerons donc sur la base de groupes de 3 ou 4 élèves, groupes qui resteront stables.
Règle 3 : Pas de recherche sans projet (on va faire), sans rapport (on a fait), sans mémoire (on a trouvé). Chaque élève a donc un « *cahier de recherche* » dans lequel il consigne ses résultats. Au début de chaque séance, il désigne un secrétaire. A la fin de chaque séance, il réserve 10 minutes pour faire le bilan de ses résultats, bilan que le secrétaire remet au professeur en fin de séance. Le professeur en donne copie aux élèves du groupe, et à ceux d'un autre groupe. Chaque élève a ainsi comme “devoir à la maison” de corriger, commenter, évaluer ou anoter le travail d'un autre groupe , et rend sa copie au professeur au début de la séance suivante.
Règle 4 : Les sujets de recherche sont proposés par le professeur et le chercheur, mais chaque élève, ou groupe d’élèves peut suggérer de *nouvelles pistes*, ou de nouveaux problèmes.
Règle 5 : Toute règle est *discutable*. Nous verrons ensemble, à l’usage, s’il faut en modifier, en ajouter, ou en retrancher …

EVALUATIONS
— critique régulière des bilans des groupes par d'autres élèves, par le professeur, par le chercheur
— choix par la classe des équipes la représentant aux congrès MATh.en.JEANS (= MeJ) et Mathématique Junior (= MJ)
— participation des équipes aux congrès MeJ et MJ : évaluation (par le trac …) lors des exposés, lors du Forum MeJ, etc.
— contributions des équipes à la brochure de synthèse
— prise en compte de l'activité de l'élève dans son bilan scolaire.

MARCHE : La géométrie du pixel

par Michaël Arditti, David Benoun, Jean-Michel Chau, Soung Ngo
du Lycée Racine de Paris

enseignant : M. Pierre Audin.

chercheur : M. Gérard Duchamp, mathématicien, Laboratoire d'Informatique de Rouen.

énoncé du sujet :
<u>Surface, longueur, volume.</u> Mesures / calculs de longueurs dans le plan discret, influence ou non des échelles, comparaison avec les longueurs dans le plan euclidien. Mesures / calculs de surfaces dans le plan / dans le plan discret, influence des échelles, maîtrise de l'erreur commise dans l'approximation. Aire d'un polygone à sommets entiers ? Aire maximum pour un périmètre donné ? Extensions aux volumes.

L'emploi de plus en plus fréquent de l'informatique dans des domaines aussi variés que le jeu, la résolution de problèmes mathématiques, et la PAO rendent la connaissance des principes de fonctionnement de l'ordinateur indispensable. L'ordinateur intervient en deux temps : il exploite, ou plutôt traduit les informations qui lui sont données par l'utilisateur au moyen du clavier, de la souris ou d'un autre ordinateur. L'information entre, puis est gérée au niveau de l'unité centrale. Dans un second temps une fois que les modifications ont étés analysées, que les calculs correspondants ont étés effectués, l'ordinateur représente au moyen de l'écran les modifications que ces informations impliquent. Ainsi la coopération ordinateur utilisateur est bouclée, une information part de l'utilisateur et une information lui est rendue. C'est au niveau de la représentation graphique de l'information que va se porter cette recherche.

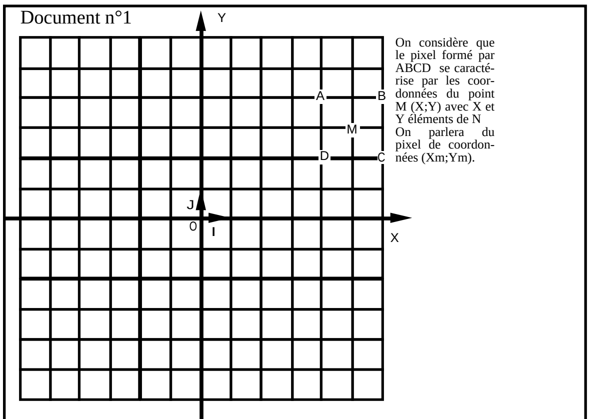
Au niveau de l'écran l'information est déjà prête, mais elle est codée de sorte que nous ne puissions l'employer telle quelle. C'est l'écran qui nous permet de la reconnaître. Une image sur écran se compose d'un nombre fini de très petites surfaces toutes semblables, indivisibles qui selon l'information fournie à l'écran s'allument ou ne s'allument pas. Cette surface s'appelle le pixel. Selon le nombre de pixels qui composent une surface-écran, l'écran a une définition plus ou moins grande.

Nous avons choisi de nous intéresser à la "géométrie du pixel", il s'agit de s'intéresser à la conservation des propriétés géométriques lors du passage de la géométrie euclidienne à la géométrie du pixel. Dans un premier temps nous définissons le pixel dans la géométrie euclidienne.

La plus petite partie du plan est un point et la plus petite partie de l'écran est un pixel, le point objet abstrait n'a aucune surface et est tel qu'il peut être défini dans un repère bidimentionnel par deux coordonnées X et Y telles que à un couple (X , Y) ne corresponde qu'un point unique. Le pixel au contraire est une surface concrète.

Un problème se pose : doit-on considérer le pixel comme une surface qui pave le plan ou comme un point du plan ? Nous avons choisi, plutôt arbitrairement, de considérer que chaque pixel est caractérisé par son centre de coordonnées X et Y tels que X et Y soient des entiers naturels.

Document n°1



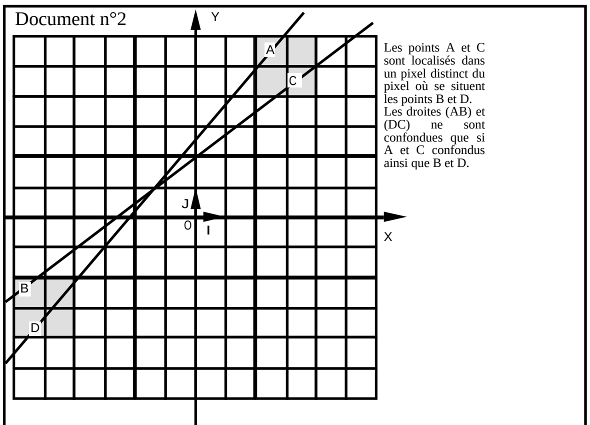
Ainsi tout couple de naturels impairs déterminent un et un seul pixel si et seulement si X élément de [Xmax;Xmin] et Y élément de [Ymax;Ymin], Xmax, Xmin, Ymax, Ymin étant les limites de l'écran.

Loi de Rachida et Hayate 1 :

C'est une jolie loi pas du tout évidente ! Il est intéressant de faire la preuve. Est-ce qu'il y a d'autres nombres dont on puisse calculer le carré ainsi ?

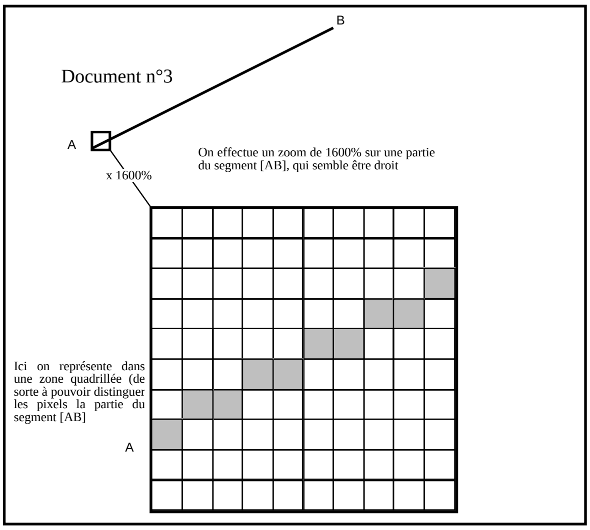
Ensuite se pose le problème de la droite, ou plutôt du segment puisque la surface de pixels est limitée. En géométrie euclidienne deux points non confondus déterminent une droite unique, il en est autrement dans la géométrie du pixel puisqu'un pixel est une surface contenant une infinité de points et définissant donc une infinité de droites.

Document n°2



Le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie du pixel contitue une perte d'information. Car à un points de coordonnées (Xp;Yp) tels que Xp et Yp éléments de R, on associe un pixel de coordonnées (Xm;Ym) avec Xm et Ym éléments de Z.

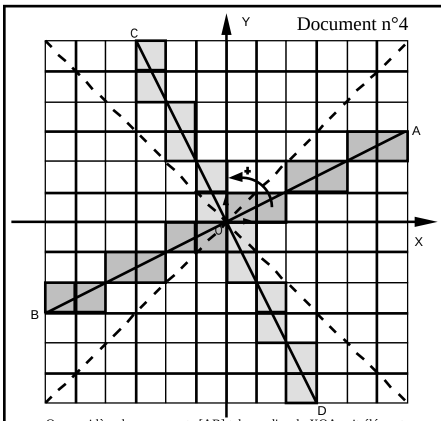
Le segment pixel est une suite de pixels allumés, qui, étant donnée la taille d'un pixel, ressemblent à un segment. (Cf. Doc 3)



Il semblerait logique que les pixels qui s'allument soient ceux que traverserait la droite euclidienne correspondante, ce n'est pourtant pas le cas. Posons comme axe des abscisses une droite horizontale par rapport à l'écran et comme origine d'un repère orthonormal direct l'intersection de cet axe avec la droite à étudier. Si la droite fait un angle avec l'axe des abscisses compris dans]0;π/4[U]3π/4; π[il n'existe pas 2 pixels de même abscisse et si l'angle est compris dans]π/4;3π/4[il n'existe pas 2 pixels de même ordonnée. En ce qui concerne les deux premières bissectrices du plan elles sont telles que les pixels qui la composent n'aient jamais la même abscisse et jamais la même ordonnée. La droite d'équation Y= 0 est composée de pixels ayant toujours la même ordonnée et la droite d'équation X = 0 est telle que tout pixel qui la compose ait la même abscisse. Ces définitions peuvent paraître très ambigües mais elle peuvent êtres attribuées à deux causes : d'une part une raison esthétique, d'autre part une raison mathématique ; car si on allume tous les pixels que traverserait la droite euclidienne on aurait des segments pixels ayant certains pixels de même abscisse et d'autres de même ordonnée.

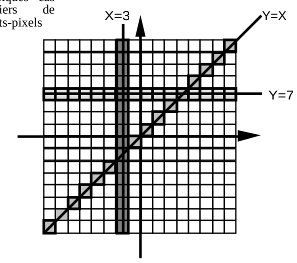
Le segment pixel est le plus court chemin d'un pixel à un autre. Ces considérations nous mènent à la symétrie dans la géométrie du pixel. Il s'agit plus exactement de symétrie entre les pixels. Le plan est pavé de pixels également répartis en quadrillage. Nous les considérons comme ayant une forme carrée et espacés de façon négligeable, mais ce critère dépend des moniteurs. Puisque le pixel est carré il admet donc des axes de symétrie cette considération en tant que telle est inutile car on envisage mal le fait d'allumer un demi-pixel. Mais cette remarque peut permettre de simplifier les comparaisons entre une surface allumée en pixels et la surface euclidienne correspondante si celle-ci comprend des axes de symétrie. Si la figure comprend un axe de symétrie on la considère telle que son axe soit parallèle à l'axe des abscisses ou à l'axe des ordonnés.

Document n°4



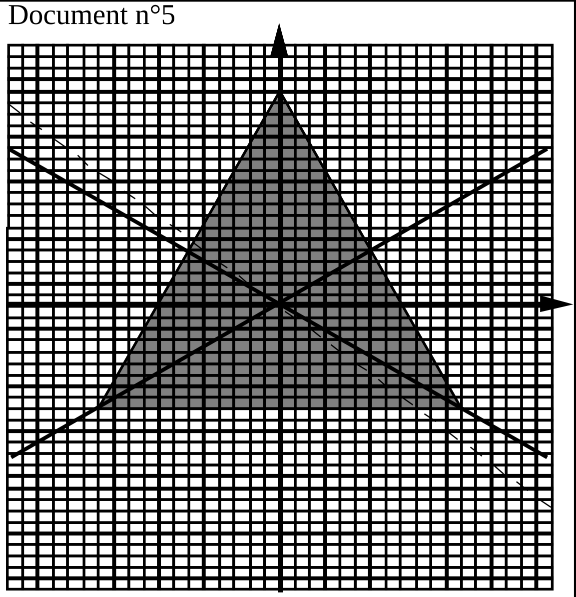
On considère deux segments [AB] tel que l'angle XOA soit élément de]0;π/4[U]3π/4;π[et [CD] tel que l'angle XOC soit élément de]π/4;3π/4[. On observe la distribution des pixels.

Ici quelques cas particuliers de segments-pixels



Si elle en comprend plusieurs on cherche à la placer de sorte qu'elle coïncide avec les symétries du plan pixel.

Document n°5



Les élèves de ce groupe se sont plus occupés des présentations interactives de leur travail lors du congrès “MATh.en.JEANS” du Palais de la Découverte et du “Congrès Mathématique Junior” (juillet 92) de la Villette que de leur compte-rendu écrit ; celui-ci n'est pas terminé.

MARCHE : Partitions d'un entier.

par Anne-Charlotte Chaput et Hélène Ho Ki-vong
du Lycée Racine de Paris

enseignant : M. Pierre Audin.

chercheur : M. Gérard Duchamp, mathématicien, Laboratoire d'Informatique de Rouen.

énoncé du sujet :
<u>Le plan discret 2.</u>
pixels, échelles ; avec des pièces de 5F et 2F, quels sont les montants que l'on peut payer sans possibilité de rendre la monnaie ? nombre de façons de le faire ? nombre de pièces au minimum pour chaque montant possible ? Avec des pièces de a et b F, quel est le plus grand montant qu'on ne puisse pas payer ?

<u>I.— On a cherché la composition de P</u>, P étant l'ensemble des sommes payables pour les pièces de 2F et 5F.

montant	2 F	5 F	pièces
0	0	0	0
1	x	x	x
2	1	0	1
3	x	x	x
4	2	0	2
5	0	1	1
6	3	0	3
7	1	1	2
8	4	0	4
9	2	1	3
10	5 o	u 2	5 ou 2
11	3	1	4
12	1	2	3
13	4	1	5
14	2	2	4
15	0	3	3
16	3	2	5
17	1	3	4
18	4	2	6
19	2	3	5
20	0	4	4

<u>Lois de Adrien 1 et Rémi 4 :</u>

La loi de Rémi est juste en général mais il y a quand même le problème de la retenue comme dans la loi de Louise. Le commentaire d'Adrien s'applique aussi.

Déduction : on peut tout payer, exceptées les sommes de 1 F et 3 F.
Une équation : $s = 5x + 2y \quad (x, y) \in \mathbb{N}^2$
s = somme.

<u>II.— On a étudié le cas des pièces de 2F et 5F de plus près afin d'en tirer un cas général.</u>
Soit P l'ensemble des sommes payables (en francs).

<u>Théorème :</u> $P = \{ 0 , 2 \} \cup [4 , +\infty [$.

<u>Démonstration :</u>
Soit M l'ensemble des montants payables.
$$M = P \Leftrightarrow M \subset P \text{ et } P \subset M$$
• $M \subset P$: tout montant payable est dans P, ou:
quelque soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ $2n + 5m \in P$.
Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ Il y a 3 cas :
n=0 et m=0 $s = 2n + 5m = 0$
n=1 et m=0 $s = 2n + 5m = 1$
quand n>1 alors $s = 2n + 5m \geq 2n \geq 4$
quand m>0 alors $s = 2n + 5m \geq 5m \geq 5$
Dans tous les cas $2n + 5m \in P$. Donc on a
$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ 2n + 5m \in P.$$
• $P \subset M$: $s \in \{ 0 , 2 \} \cup [4 , +\infty [$, il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $s = 2n + 5m$.
Soit $s \in \{ 0 , 2 \} \cup [4 , +\infty [$. Il y a 2 cas :
ou $s \in \{ 0 , 2 \}$, ou $s \in [4 , +\infty [$.
• si $s \in \{ 0 , 2 \}$: $s = 0 = 0x2 + 0x5$
$s = 2 = 1x2 + 0x5$
• si $s \geq 4$. Montrons par récurrence que s peut être payée.
$s = 4 = 2x2 + 0x5$.
supposons que s puisse être payée : comme $s \geq 4$, $n \geq 2$ ou $m \geq 1$, alors :
(voir tableau pour un exemple)
$s + 1 = 2x(n-2) + 5x(m+1) \quad (n \geq 2)$
$s + 1 = 2x(n+3) + 5x(m-1) \quad (m \geq 1)$.
Donc s+1 peut être payée ce qui achève la récurrence.

III.— A partir de cela on a déduit un "cas général".

Soit (n, m) n le nombre de pièces de a F
m le nombre de pièces de b F

(n, m) = (0, 0) donc s=0 avec s la somme payable sans possibilité de rendre la monnaie.

(n, m) = (1, 0) s = an + bm = a

par récurrence :

Soient a et b 2 pièces différentes. a < b.
Soit s une somme payable sans possibilité de rendre la monnaie.
3 cas :
$s \leq a$. On cherche les plus petites sommes payables sans possibilité de rendre la monnaie. Donc il y a deux sommes :
s = 0
s = a, car a < b, donc on cherche le plus petit multiple de a, à part 0, qui est 1.
Donc s_1 = 1 x a = a.
$a \leq s < b$. De a à b, les sommes s payables si elles existent seront multiples de a car dans ce cas s < b, donc on ne considère pas encore les pièces de b F. Donc les sommes ne seront payées qu'avec des pièces de a F.
$s \geq b$. PROBLEME. Plusieurs cas. Sortons du cas général en étudiant encore des contre-exemples. On s'aperçoit qu'un exemple nous a posé des problèmes et nous a empêché d'établir le cas général donc la récurrence n'est pas achevée …

En essayant avec une autre méthode, qui nous ramène au II :

Maintenant pour des pièces de 15 F et 21 F. On cherche n & m pour que s = 15n + 21m. Il faut calculer le PGCD de 15 & 21.
PGCD(15, 21) = 3.
Donc s/3 = (15/3) n + (21/3) m

K = 5n + 7m. Sans contrainte, on parvient à tout payer, mais sans possibilité de rendre la monnaie …

1 = 3x5 - 2x7

2 = 6x5 - 4x7

3 = 9x5 - 6x7

4 = 12x5 - 8x7
lorsque les coefficients sont < 0, ces sommes ne peuvent être payées.

5 = 15x5 - 10x7
si j'ajoute 2x5 pièces de 7 F, alors il faut enlever 2x7 pièces de 5 F.
5 = 1x5 + 0x7 possible

6= 18x5 - 12x7

7= 21x5 - 14x7
7 = 0x5 + 1x7 possible

8 = 24x5 - 16x7

9 = 27x5 - 18x7

10 = 30x5 - 20x7
10 = 2x5 + 0x7 possible

11 = 33x5 - 22x7

12 = 36x5 - 24x7
12= 1x5 + 1x7 possible

etc …

Ainsi nous trouvons toutes les sommes payables et la façon de les payer. Ceci est applicable pour toutes pièces de a F et b F.

Commentaires de Gérard Duchamp sur le travail de ce groupe :

Le travail avec ce groupe a été l'occasion d'une analyse sur la forme des démonstrations, la nécessité d'adopter un schéma de raisonnement et de s'y tenir (faire le bilan de ce qui a été établi et de ce qui ne l'est pas, bref apprendre à faire le point).

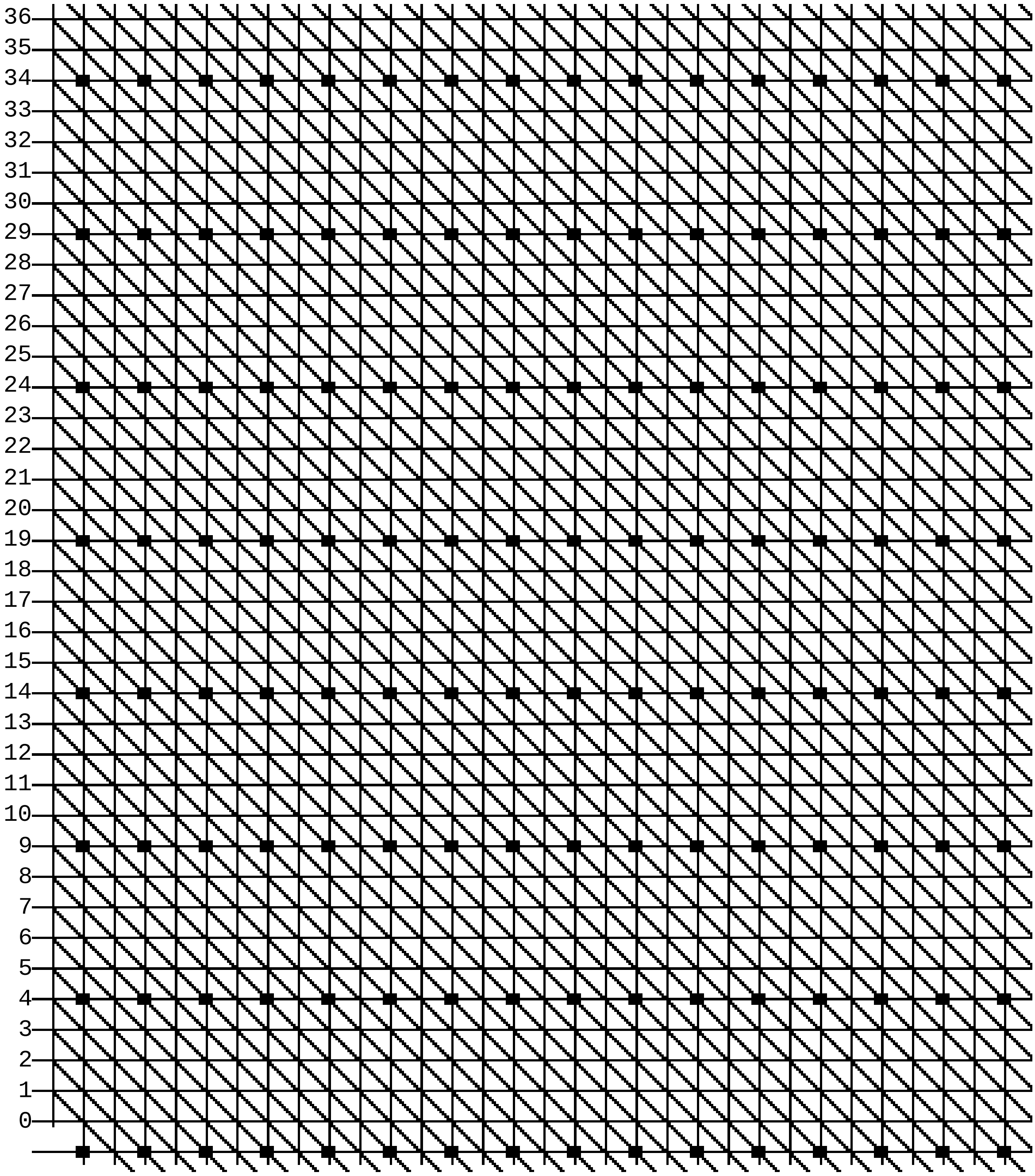
Commentaires acerbes (P.A.):

Il est fréquent, dans les compte-rendus des élèves participant à MATh.en.JEANS, qu'il leur soit très difficile de se souvenir des pistes qu'ils ont abandonnées. Dans le cas présent, les élèves ont été tenus de fournir des bilans de chaque séance, et il est donc étonnant de voir à quel point, ici, toute une partie du travail mené est carrément ignorée. Peut-être est-ce dû à l'insistance de Gérard Duchamp, puis de moi, dans la forme et le fond de la démonstration (en particulier, mais pas seulement, du fait que c'est une démonstration par récurrence).
Il y a ainsi eu tout un travail graphique : les sommes payables s'obtiennent en projetant les nœuds du réseau dans la direction de la diagonale, sur l'axe vertical situé à gauche du quadrillage.

Loi de Rhaled 1 :

Est-ce qu'on peut énoncer une loi un peu plus générale qui donnerait les deux lois (celle de Manuel et de Rhaled) ?

Les phénomènes dûs à la divisibilité des valeurs des pièces seraient sans doute mieux apparus si ce travail graphique avait été poursuivi, parallèlement à une interprétation numérique et réciproquement.



MARCHE : Pythagore

par Philippe Chapeau, Edouard Collin, Pierre Fournier du Lycée Racine de Paris.

enseignant : M. Pierre Audin.

chercheur : M. Gérard Duchamp, mathématicien, Laboratoire d'Informatique de Rouen.

énoncé du sujet :

Pythagore.
Validité sur la sphère, dans le plan, dans le plan discret ? démonstration correcte dans le cas du plan.
Quels nombres entiers sont sommes de 2 carrés ? Quels sont les triangles rectangles dont les sommets sont à coordonnées entières ?
Triplets pythagoriciens : solutions en nombres a, b, c entiers de l'équation

$a^2 + b^2 = c^2$.

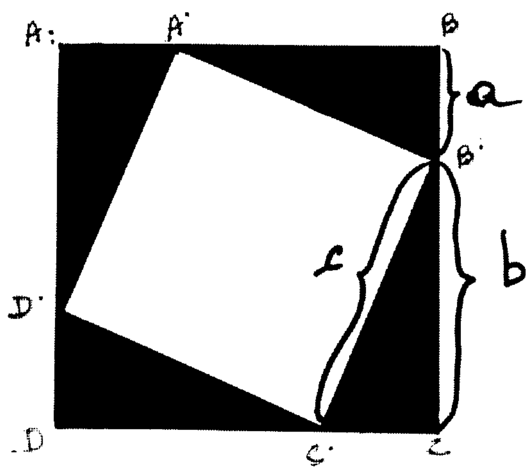
" Dans un triangle rectangle — le carré de l'hypoténuse — est égal — à la somme — des carrés — des deux autres côtés. "

Théorème de Pythagore dans le plan

Soit un carré ABCD, de côtés a + b, et A' un point de [AB], B' un point de [BC], C' un point de [CD], D' un point de [DA], tels que

AA' = BB' = CC' = DD' = a

et A'B = B'C = C'D = D'A = b.



On obtient alors des triangles rectangles (quatre)

A'BB', rectangle en B
B'CC', rectangle en C
C'DD', rectangle en D
D'AA', rectangle en A.

Les quatre triangles obtenus ont pour côtés a et b et un angle droit ; donc les quatre triangles sont égaux et ont même hypoténuse.
Donc A'B' = B'C' = C'D' = D'A' = c. Le quadrilatère A'B'C'D' est un losange.

Soient $\alpha = \angle$ BA'B' = $\angle$ CB'C' = $\angle$ DC'D' = $\angle$ AD'A'
et $\beta = \angle$ A'B'B = $\angle$ B'C'C= $\angle$ C'D'D = $\angle$ D'A'A.

La somme des angles d'un triangle = 180°.
Soit γ l'angle de 90°de ces triangles.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$; $\alpha + \beta = 90°$.

Soit O le point d'intersection des diagonales de ABCD. OA = OB = OC = OD.
Par la rotation de centre O et d'angle 90° :

A' $\to$ D', B $\to$ A, B' $\to$ A', etc …
A'BB' $\to$ D'AA' $\to$ C'DD' $\to$ B'CC'
$\angle$ AA'B = 180°; $\alpha + \beta = 90°$
$\angle$ AA'D = β et $\angle$ BA'B' = α donc
$\angle$ D'A'B' = $\angle$ AA'B - $(\alpha + \beta)$ = 90°.

Donc le quadrilatère A'B'C'D' a un angle droit et les côtés égaux : A'B'C'D' est un carré.

aire du grand carré :
$A = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
somme des aires des triangles rectangles :
$A_2 = 4 \times (b \times a/2) = 2ab$

Si l'aire du grand carré (noir + blanc) moins la somme des aires des triangles (noirs) est égale à l'aire du carré blanc alors le théorème de Pythagore est vrai dans le plan.

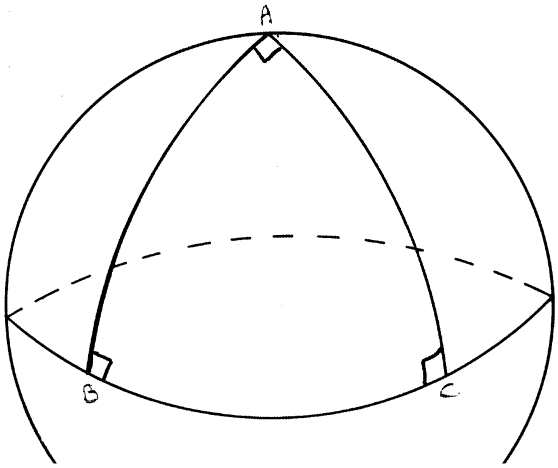
On a : aire du grand carré - $A_2 = A_1$

donc $a^2 + b^2 = c^2$.

Conclusion : le théorème de Pythagore est vrai dans le plan (ceci est lié au fait que la somme des angles d'un triangle y est égale à 180°).

Pythagore dans la sphère

On prend un point A au pôle nord de la sphère et 2 points B et C sur l'équateur.



Si BC = 1/4 de la circonférence le triangle ABC a 3 angles droits. La somme de ces angles est égale à 270°. De plus ABC est un triangle équilatéral.

Si on prend par exemple la mesure du côté égale à 1, d'après le théorème de Pythagore on devrait avoir $1^2 + 1^2 = 1^2$. Le théorème de Pythagore est donc faux dans la sphère.

Pixels

On considère le pixel comme un carré (pour une droite, celui qui s'éclaire est celui qui a le côté en haut à droite le plus près de la droite). On distingue 3 distances :

— **distance euclidienne**. C'est la distance du plan euclidien.

— **"distance" aux bords**. C'est le nombre de pixels entre 2 points, sans compter le premier. **N.D.L.R.** Cette "distance" n'en est pas une (voir ci-dessous) surtout parce que cette définition n'en est pas une : quels sont les "pixels entre 2 points" ??

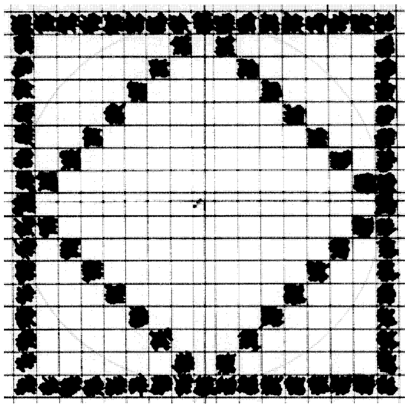
— **"distance" directe**. On prend la surface extérieure des pixels (on compte le nombre de côtés extérieurs). **N.D.L.R.** Même problème avec cette "définition" …

Axiomes des distances :

1. d(A, B) = 0 ssi A = B
2. d(A, B) = d(B, A)
3. d(A,C) ≤ d(A, B) + d(B, C)

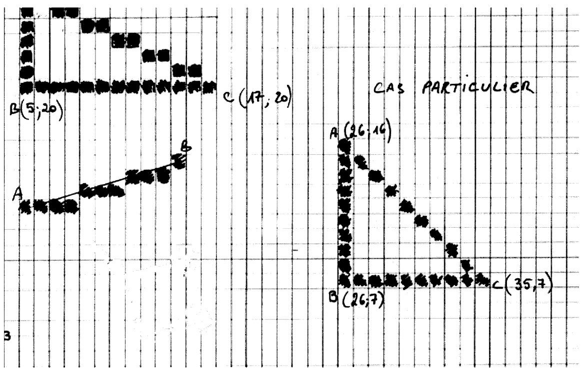
<u>Lois de Hanane 2 et Jean-Claude 1 :</u>
La distinction égalité / relation / opération est intéressante ; c'est vrai que l'égalité est une relation entre deux nombres ; je dirai plus précisément qu'une opération est quelque chose qui à 1 ou 2 ou 3 (ou etc) nombres associe un nouveau nombre ; c'est un procédé pour obtenir de nouveaux nombres.
(…)

La distance euclidienne vérifie ces 3 axiomes mais les 2 autres "distances" ne les vérifient pas. [N.D.L.R. voir ci-dessus.]



représentation graphique d'un cercle de rayon 8 pixels avec les différentes distances.

Application de la relation $a^2 + b^2 = c^2$
— dans le cas particulier : avec les distances aux bords, la relation est vraie, avec la distance directe, la relation est fausse, avec la distance euclidienne elle est vérifiée.
— dans le cas général : il n'y a que la distance euclidienne qui vérifie le théorème de Pythagore.



dessins de triangles particuliers avec côtés parallèles aux axes ou aux bissectrices

conclusion

Le théorème de Pythagore est vérifié dans le plan mais non dans la sphère et la géométrie des pixels (pour les distances aux bords et directe).