A propos de cercles, sphères, photo, miroir, … Deux noms barbares :

inversion et projection stéréographique

par M. Charles Payan, Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique de Grenoble.

Lorsqu’on représente un objet (photographie, dessin, schéma, …) on souhaite en général que les “images” obtenues aient une certaine ressemblance avec l’objet représenté. Comment bien représenter un cercle, une sphère ?

Au lieu de représentation, nous emploierons plutôt ici le terme de *transformation*. L’image d’un objet sera la *transformée* de cet objet. Quelles sont les transformations qui conservent la forme des cercles, sphères … ?

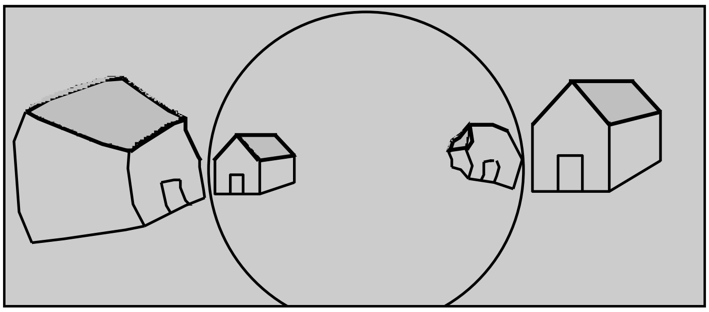
Il y a, bien sûr, les *déplacements* : translations, rotations (on “bouge” la figure), les *retournements* : symétrie, image dans un miroir, les *homothéties* (et plus généralement, les *similitudes*) : on “grossit” (ou on réduit).

Une autre transformation essaie un peu de simuler ce qui se passe lorsqu’on regarde un objet : “plus on est près, plus on voit gros”. C’est **l’inversion**.

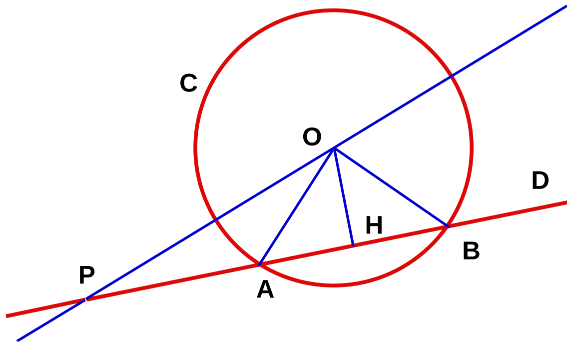
On tient compte ici du point d’où l’on regarde : c’est le **centre d’inversion.**

On verra aussi que l’inversion permet de représenter un peu ce que l’on voit dans certains miroirs.

Auparavant, nous aurons besoin de quelques propriétés des cercles et des sphères.



Puissance d’un point par rapport à un cercle, à une sphère.



Soit un point P, un cercle C et une droite D passant par P et coupant C en deux points A et B. Calculons le produit $\overline{PA} \bullet \overline{PB}$.

Désignons par R le rayon du cercle. Le théorème de Pythagore et trois lignes de calculs (pas plus …) permettent de trouver : $\overline{PA} \bullet \overline{PB} = PO^2 - R^2$

Le produit $\overline{PA} \bullet \overline{PB}$ ne dépend donc pas de la droite D, mais uniquement du cercle C et de la position du point P. On l’appelle **puissance** de P par rapport à C.

Cette puissance est positive si le point est à l’extérieur du cercle, négative si le point est à l’intérieur et nulle si le point est sur le cercle.

Nous pouvons maintenant définir l’inversion .

L’inversion de centre P et de puissance p est la transformation qui à tout point A associe le point A’ tel que : $\overline{PA} \bullet \overline{PA'} = p$.
Par exemple, l’inversion de centre P et de puissance $PO^2 - R^2$, transforme le point A en le point B (en quoi transforme-t-elle le point B ?). Cette inversion transforme le cercle C en lui-même.

Considérons maintenant l’inversion de centre P et de puissance $p \neq PO^2 - R^2$.
En quoi le cercle C est-il transformé ?
$\overline{PA} \bullet \overline{PA'} = p$; $\overline{PA} \bullet \overline{PB} = PO^2 - R^2$

Donc $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PB}} = \dfrac{p}{PO^2 - R^2}$

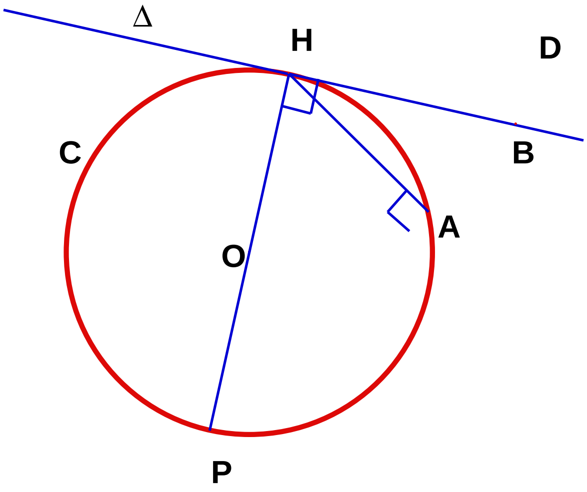
Appelons k ce rapport. A’ est le transformé de B par l’homothétie de centre P et de rapport k.

Le cercle C est donc transformé en un cercle. (L’homothétique d’un cercle est un cercle).

Suivant les valeurs de k on obtient différents cercles, par exemple, un cercle situé au delà de C et plus grand si k est plus grand que 1, entre P et C et plus petit si k est compris entre 0 et 1, en deçà de P si k est négatif, …

Lorsque $PO^2 - R^2 = 0$, autrement dit, lorsque le point P est sur le cercle, on ne peut définir le rapport k (division par 0 …).

Nous avons besoin maintenant d’**une autre propriété du cercle**.



Soit un point P situé sur un cercle C de centre O. Soit Δ la droite perpendiculaire à PO et tangente au cercle C. Soit une droite D passant par P et coupant C en A et Δ en B.

Calculons le produit $\overline{PA} \bullet \overline{PB}$.

En remarquant que le triangles PAH et PHB sont semblables (c’est-à-dire, sont les représentations d’un même triangle à des échelles différentes), on trouve immédiatement :

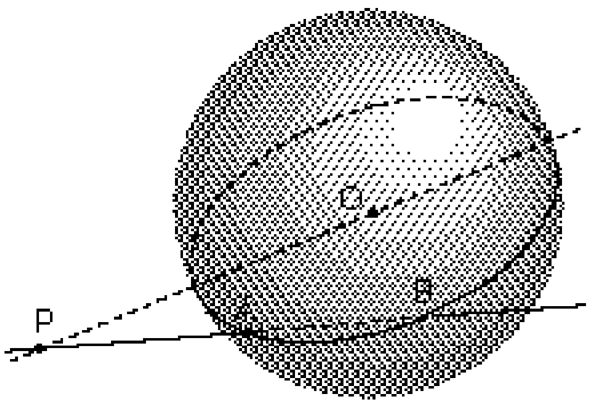
$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PH}} = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{PB}}$ et donc : $\overline{PA} \bullet \overline{PB} = \overline{PH}^2$

L’inversion de centre P et de puissance $\overline{PH}^2$ transforme donc le cercle C en la droite Δ et réciproquement.

Une inversion de puissance différente transformerait C en une droite homothétique à Δ, et la droite Δ en un cercle homothétique à C, passant par P.

Ces notions se généralisent facilement à des dimensions supérieures.

Puissance d’un point par rapport à une sphère



Soit une droite D passant par le point P et coupant la sphère S en deux points A et B.

Que vaut le produit $\overline{PA} \bullet \overline{PB}$?

Considérons le plan passant par la droite D et le centre de la sphère (c’est le plan de symétrie de la figure auquel on pense assez naturellement), puis le “grand” cercle, intersection de ce plan et de la sphère. Ceci nous permet de conclure facilement.

On déduit donc immédiatement que l’inverse d’une sphère est une sphère.

Lorsque le centre d’inversion est sur la sphère, on obtient un plan (c'est-à-dire, une (très) grosse sphère).

L’inverse d’un plan est une sphère passant par le centre d’inversion.

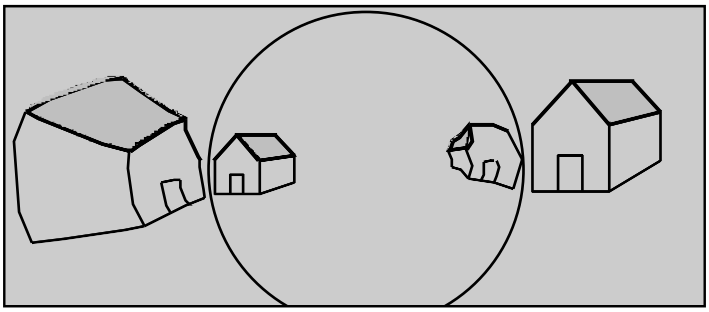
L’inversion a été introduite par Poncelet (1822). C’est un outil géométrique simple et puissant : en transformant des cercles en droites, on peut simplifier certains problèmes.

L’inversion est notamment l’un des moyens de résoudre le célèbre problème d’Apollonius (262-190 A.C.) : construire un cercle tangent à trois cercles donnés.

Pourquoi ce terme d’inversion ?

Soit une inversion de centre O et de puissance R^2. Cette inversion conserve évidemment le cercle C (et la sphère) de centre O et de rayon R. Tout point intérieur au cercle est transformé en un point extérieur et réciproquement. L’inversion “renverse” le monde par rapport à ce cercle.

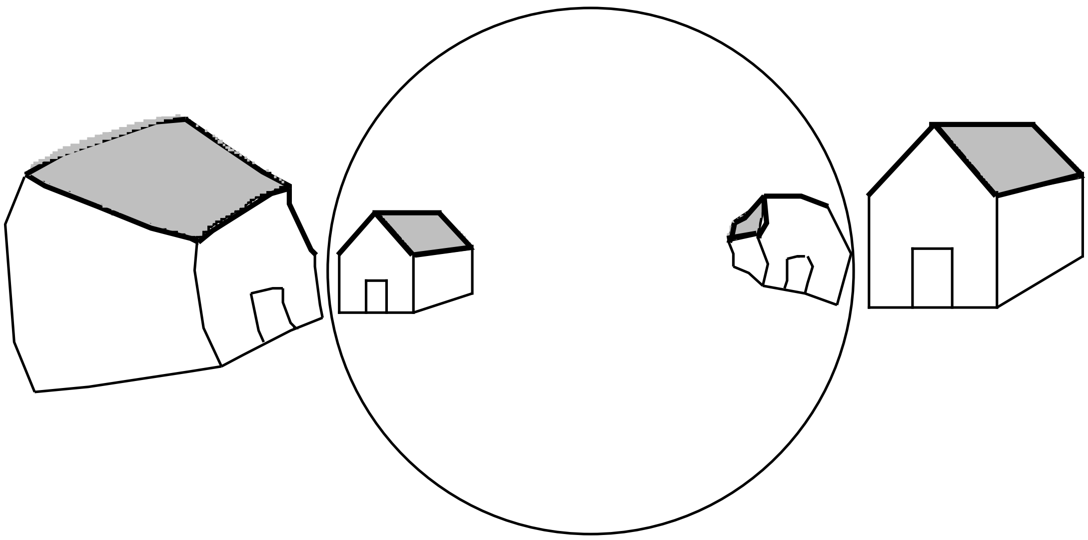
Ce cercle C sera appelé **cercle d’inversion** ; le transformé d’un point (ou plus généralement d’une figure) par l’inversion de centre O et de puissance R^2 sera appelé **l’inverse** de ce point (ou de cette figure) **par rapport au cercle C.**



- → **caractérisez les autres cercles invariants par cette inversion**
- → **étudiez l’inversion de centre O et de puissance $(-R^2)$**
- → **cherchez des constructions géométriques de l’inverse d’un point**
- → **essayez d’imaginer d’autres transformations qui échangent l’intérieur et l’extérieur d’un cercle.**

L’inverse d’une figure ressemble un peu à son image obtenue dans un miroir sphérique. Inversion se dit d’ailleurs en allemand “Kreisspiegelung”, que l’on peut traduire par **“image dans un cercle”**. Les deux maisons se “réfléchissent” dans le cercle (qui ici joue à la fois le rôle de miroir convexe pour la maison située à l’extérieur et de miroir concave pour la maison située à l’intérieur).

- → **Réfléchir à la notion d’image dans un miroir non plan**
- → **On veut aller d’un point A à un point B en allant chercher de l’eau dans une rivière (rectiligne) ou dans un lac (par ex. circulaire). Trouver le chemin le plus court.**

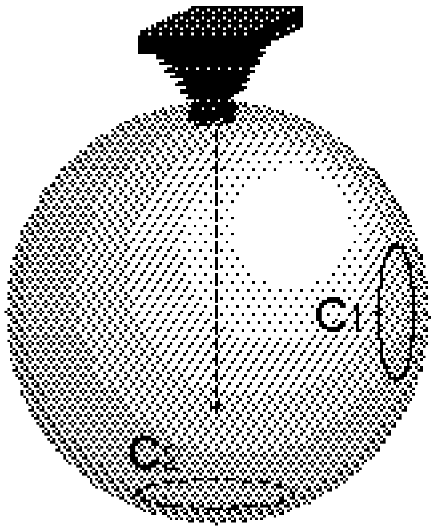


Projection stéréographique.

Revenons à un problème de vision.

Imaginons une sphère transparente sur laquelle on a tracé différentes figures, par exemple des cercles. Plaçons un appareil de photo, muni d'un très "grand angle" (objectif à très courte focale), à la surface de la sphère et dirigé vers le centre.

Qu'obtient-on sur la photo ?

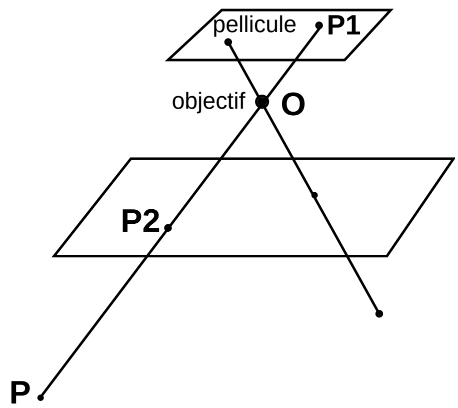


En particulier, quelle est l'image d'un cercle ? Un cercle aplati ("ovale", ellipse, …), un vrai cercle, … ?

L'image d'un cercle situé dans un plan perpendiculaire au plan de la pellicule, comme le cercle C_1, sera-t-elle semblable à celle d'un cercle parallèle au plan de la pellicule comme le cercle C_2, ou sera-telle plus aplatie ?

Essayez de répondre avant de "réfléchir mathématiquement" (ce que nous allons bientôt faire).

Une photo est en fait une projection "centrale" (de centre O, l'objectif) sur le plan de la pellicule.



Les images obtenues sur des plans parallèles étant homothétiques, donc semblables, on pourra projeter sur n'importe quel plan parallèle au plan de la pellicule.

L'image du point P est le point P_1 sur la pellicule, le point P_2 sur le plan parallèle.

Soit, dans la figure suivante (ci-contre, page suivante), la projection "centrale" de centre O, qui projette la sphère S sur le plan P (l'image du point A est le point A').

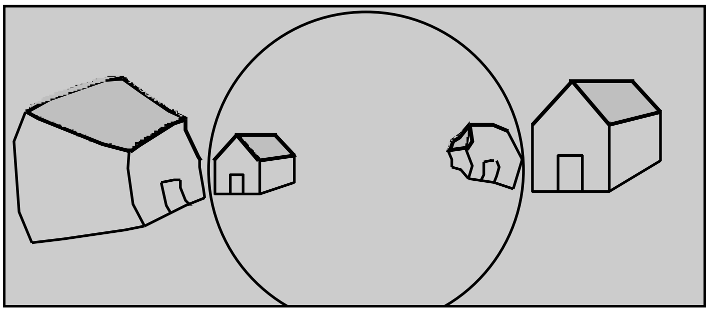
Cette transformation n'est en fait rien d'autre que l'inversion de centre O qui transforme la sphère S en le plan P (inversion de puissance OA.OA'). On l'appellle **projection stéréographique**. Introduite par Ptolémée (qui vivait au $2^{ème}$ siècle après J.C.et bien sûr ne connaissait pas l'inversion …), elle fut la base de la cartographie terrestre pendant de nombreux siècles.

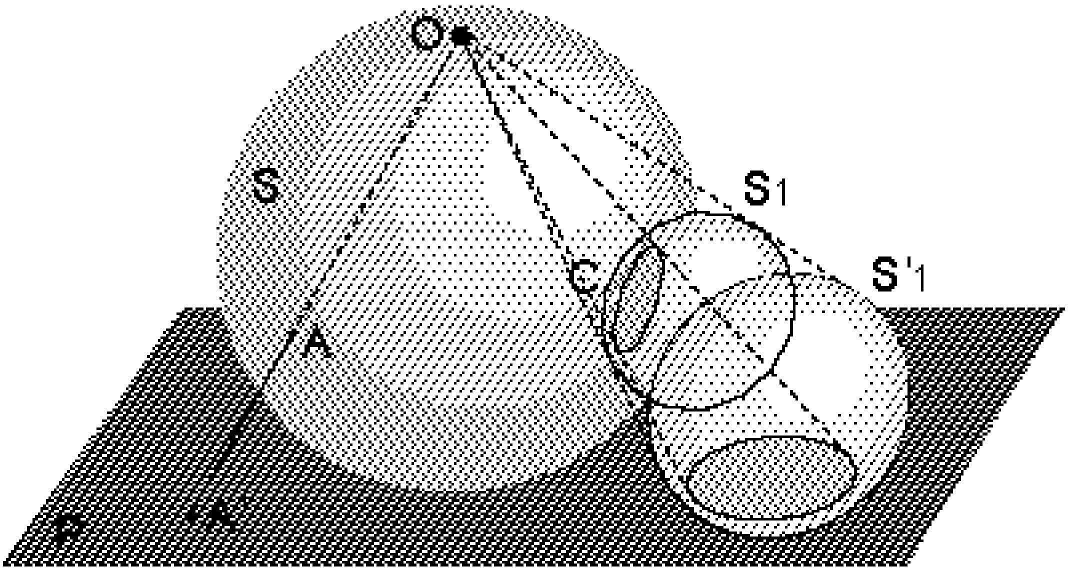
Soit un cercle C tracé sur la sphère S. On peut obtenir ce cercle comme l'intersection de la sphère S et d'une autre sphère S_1. L'inverse de cette sphère S_1 est une certaine sphère S'_1, l'inverse de la sphère S est par définition le plan P.

L'inverse du cercle C, intersection des sphères S et S_1, est donc l'intersection des inverses des sphères S et S_1, c'est-à-dire l'intersection du plan P et de la sphère S'_1 : **c'est donc un cercle .**

→ **Le cercle C et son image appartiennent-ils à une même sphère ?**

→ **L’inversion, on l’a vu sur les 2 maisons, déforme notablement les figures. Or la projection stéréographique est utilisée couramment en cartographie. Essayez en réfléchissant davantage à cette transformation de trouver ce qu’elle conserve.**





Un dernier retour sur l’inversion

Nous allons répondre à la dernière question en donnant les éléments qui permettent de montrer que **l’inversion conserve les angles**.

Soit deux cercles C_1 et C_2 qui se coupent suivant un angle α, leurs images C'_1 et C'_2 par une certaine inversion I se coupent suivant le même angle α.

Si l’on se souvient que l’homothétie conserve les angles (on ne fait que changer d’échelle), on peut remarquer que cette propriété est indépendante de la puissance de l’inversion : on raisonne “à une homothétie près”. On peut donc choisir la puissance de l’inversion de telle manière que le cercle C_2 soit transformé en lui-même ($C_2 = C'_2$).

La preuve de la conservation des angles par l’inversion est contenue dans la figure suivante.