FLASHES DE GEOMETRIE

Conférence inaugurale de **M. Marcel Berger**
Directeur de l'IHES (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures sur Yvette)

Adaptation par **Pierre Duchet** & **Charles Payan** *avec le concours de* **Pierre Audin.**

« Vous verrez que pratiquement tous les résultats que je vais citer ont 10 ans au maximum. Ils ont été résolus le plus souvent par des techniques qui venaient complètement d'ailleurs. C'est assez inattendu. »

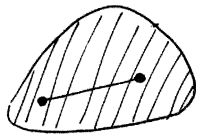
Chacun de ces flashes consistera à partir d'un certain concept de la géométrie élémentaire, facile à visualiser. On est conduit à des problèmes qui possèdent les caractéristiques suivantes :
— certains sont non encore résolus aujourd'hui.
— certains n'ont été résolus que tout récemment et ce par des techniques
- très difficiles
- conçues pour de toutes autres raisons ».
[NDLR : nous n'avons retenu ici qu'un thème, celui de la rotondité des corps convexes. Par ce compte-rendu et l'article précedent de C. Payan sur l'inversion, nous invitons à la lecture de deux textes de vulgarisation de Marcel Berger récemment parus :
Les corps convexes, La Recherche n°246 (Sept. 1992), pp. 992-1000.
Les placements de cercles, Pour la Science n°176 (Juin 1992), pp. 72-79. Cet article étudie notamment les deux autres problèmatiques abordées par M. Berger dans sa conférence :
- Les paquets de cercles ou : comment mettre une sphère en cage ? (Peut-on toujours inscrire une sphère dans un polyèdre de combinatoire imposée ?)
- Comment bien installer des points sur une sphère ? (trous d'une balle de golf…)]

Combien méchant peut être un convexe ?

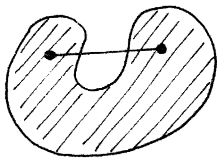
ou

quel est le convexe le moins rond ?

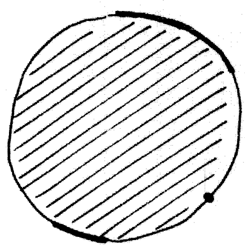
Un convexe, c'est que chose qui est tel que quand on prend deux points dedans … (je fais tout dans le plan pour commencer).

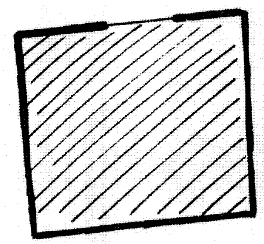


Donc, un convexe c'est quelqu'un qui est tel que, chaque fois qu'on prend deux points dedans, tout le segment qui les joint est dedans.



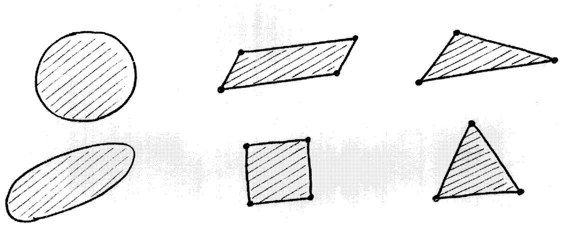
Vous avez là quelque chose qui n'est pas convexe. Si vous aimez les fractals alors il faut quitter la salle parce que le convexe c'est typiquement un non-fractal. La convexité c'est une sorte de garantie, d'assurance, de contrôle : elle garantit que vous n'avez pas de trou, pas de creux, pas de gondolement.





Sur ces exemples du disque et du carré, j'ai mis en gras les parties de frontière que je garde, qui sont dans mon ensemble ; les autres parties de la frontière, dessinées comme l'intérieur, ne sont pas dedans. Dans le cas du carré on a des pépins en ce sens que l'ensemble qui est là, ce carré, n'est pas convexe si on a ôté des points de la frontière. Par contre, pour un disque pas de problème : quand on joint deux points on est toujours strictement à l'intérieur.
Pour éviter ces subtilités, je décide que tous les convexes dont je parle contiennent leur frontière (les mathématiciens appellent ça un ensemble *fermé*).

3 exemples essentiels, lequel est le moins rond ?



Je vous dis : voilà 3 exemples de convexes. Quelle est votre critique ? Il y en a 6 ! Ça, c'est typique des mathématiques : il y en a 3 ou 6 suivant le point de vue qu'on prend.

Une ellipse et un cercle ne sont que deux perspectives différentes d'un même objet.

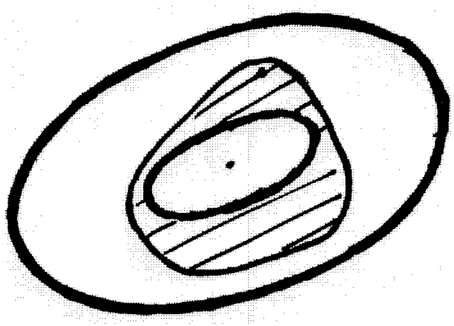
Si vous êtes un géomètre sans règle graduée, un géomètre qui sache repérer les alignements, les proportions mais qui ne mesure pas de distances, si vous faites ce qu'on appelle en jargon de la *Géométrie Affine*, alors vous ne ferez pas de différence entre un un disque et une ellipse pleine, entre un carré et un parallélogramme, entre un triangle équilatéral et un triangle scalène.

☞ D'ailleurs, prenez des coordonnées obliques : un parallélogramme, c'est un carré (les points à coordonnées entre 0 et 1). Faites donc subir à un cercle, à un carré à un triangle équilatéral des symétries obliques, photographiez de biais un ballon, un cube…

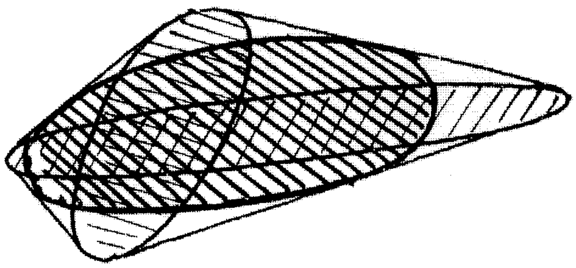
Comment juger du défaut d'être rond (d'être une ellipse) ?

Est-ce qu'un convexe est très méchant, étant donné qu'on prend pour principe que l'ellipse pleine, ou le disque, c'est le plus régulier des convexes, quelque chose que l'on contrôle très bien, tandis qu'un carré, ça a des coins, les diagonales sont plus grandes, etc … ? Comment mesurer le "**degré de méchanceté d'un convexe**" ? Peut-on, mathématiquement, pousser un peu cette question : il faudrait en quelque sorte trouver un nombre qui mesure ce degré.

Premier critère : l'ellipse de John-Loewner et son agrandissement

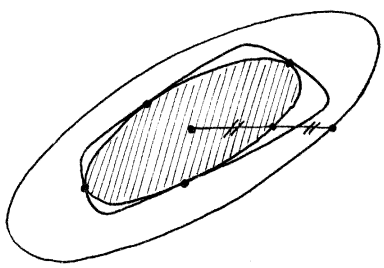


L'idée est d'encadrer le convexe entre deux ronds semblables : le grossissement (en jargon le rapport d' homothétie) nécessaire pour passer d'une ellipse contenue dans C à une ellipse contenant C est une manière d'exprimer le "degré de méchanceté" de C.

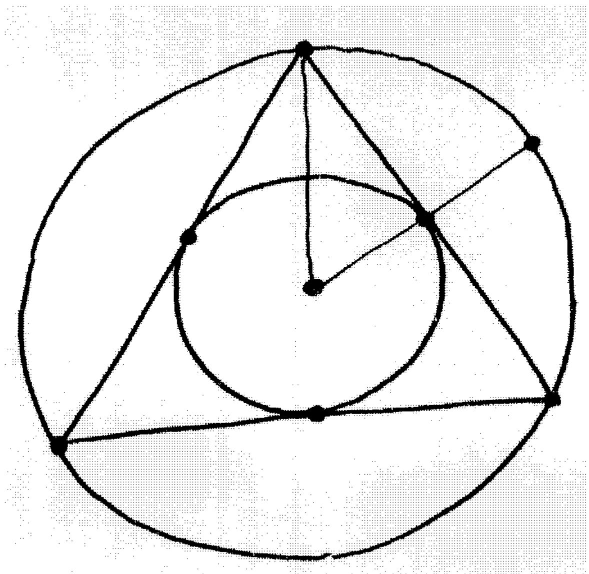


On peut trouver dans tout convexe une ellipse d'aire maximum : une telle ellipse **existe** (ce n'est pas très très difficile), **elle est unique** (c'est un peu plus difficile : on peut montrer que s'il y en avait deux, on pourrait en trouver une de surface un peu plus grande). On l'appelle **l'ellipse de John-Loewner** (1940, 1948).

C'est un théorème très important, qui a de nombreuses applications : programmation linéaire (solution d'un système d'inégalités linéaires, c'est-à-dire où les inconnues interviennent au premier degré), géométrie (caractérisation des ellipses) …



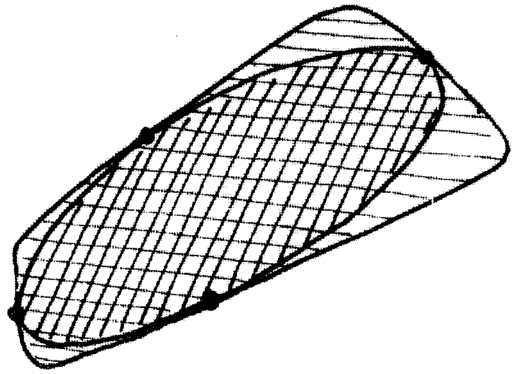
Un théorème de John dit que tout convexe peut être squeezé entre cette ellipse d'aire maximum et l'ellipse de même centre obtenue par homothétie de rapport 2.
Autrement dit, aucun convexe n'est trop méchant, aucun convexe n'est plus méchant que dans le rapport 2. Maintenant est-ce que vous croyez qu'on peut atteindre ce degré de méchanceté égal à 2 ? et si oui, avec quoi ? Est-ce que vous pouvez imaginer un tel convexe ? […] (Il semble que même les professionnels n'ont pas la réponse instantannée, à moins qu'ils ne soient d'excellents comédiens).



Le triangle fourni un rapport 2 (vous prenez un triangle équilatéral ou non, ça n'a aucune importance, les triangles qu'ils soient équilatéraux ou quelconques sont les mêmes pour un géomètre qui se permet de changer de coordonnées).
Donc vous voyez que un triangle, on ne peut pas faire pire. Au fond, **le plus méchant des convexes, dans le plan, c'est le triangle.**

Second critère :

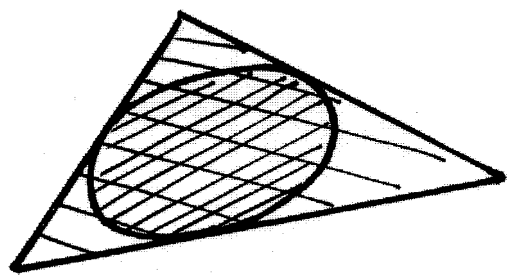
le rapport aréolaire



Toujours avec cette ellipse d'aire maximum, on va donner un autre degré de méchanceté.
Un convexe a une bonne surface, qu'on peut mesurer (ce n'est pas si facile d'ailleurs avec un ordinateur de calculer la surface de quelque chose qu'on trace avec une souris). Je mets l'ellipse la plus grande dedans et je forme le rapport des surfaces.

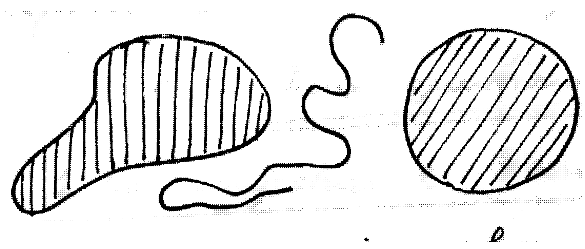
$$\frac{\text{Aire du convexe}}{\text{Aire de l'ellipse de John-Loewner.}} \geq 1$$

Si le convexe est vraiment une ellipse, le rapport est 1. Maintenant, quel est *le plus grand* des rapports possibles ? C'est seulement récemment que K. Ball a démontré que ce rapport est le plus mauvais, le plus grand, pour le triangle (c'est assez difficile à démontrer). Ici encore c'est le triangle qui est le moins rond.



☞ Quel est ce rapport maximum? (Comme vous savez, pour les mathématiciens, la valeur importe peu, souvent.)

Troisième critère : l'inégalité isopérimétrique inverse



Vous prenez une ficelle, de longueur donnée, et vous essayez, dans le plan, d'entourer la surface la plus grande possible. C'est un problème dont les conséquences économiques, donc financières, sont évidentes, connu depuis bien longtemps.

La solution, c'est un cercle (voilà notre “rond”; cette fois-ci attention, pas une ellipse, vraiment un cercle : c'est avec un cercle que j'ai la plus grande surface pour un morceau de corde donné).

Autrement dit, si on remplace un domaine plan par un disque de même aire (nous dirons que c'est le *disque équivalent*), le périmètre ne peut que diminuer ; on peut écrire ceci, pour nous en tenir aux convexes, sous la forme :

$$\frac{\text{Périmètre du convexe}}{\text{Périmètre du disque équivalent}} \geq 1$$

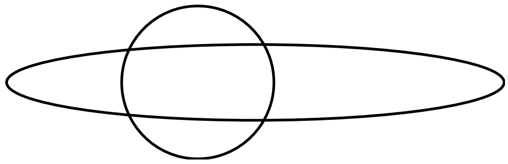
ou encore : $$\frac{\text{Périmètre}}{\sqrt{\text{aire}}} \geq 2\sqrt{\pi}$$

Cela traduit en jargon le fait que, pour tout convexe, quand on prend la longueur de la frontière, qu'on divise par la racine carrée de la surface (pour que ça soit homogène, comme on dit), le rapport obtenu est minimum pour le cercle.

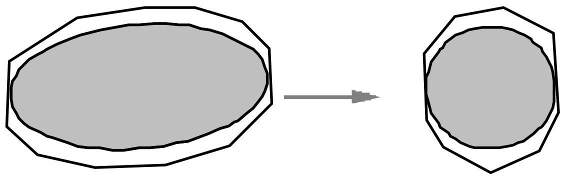
Et d'ailleurs uniquement pour le cercle : ce théorème “*isopérimétrique*” semble intuitif. Nonobstant, de nombreux très grands mathématiciens ont donné des démonstrations fausses pendant les trois quarts, même les neufs dixièmes du XIX° siècle, avec des raisonnements du genre suivant : n'importe quelle suite de nombres a une limite. Vous trouvez ça chez Monsieur Steiner, dont vous verrez plus loin que c'est un très grand géomètre. Il a fallu attendre 1890 pour avoir une solution correcte.

Alors maintenant, je pose la question : est-ce qu'on peut avoir une inégalité en sens inverse ?

$$\frac{\text{Périmètre du convexe C}}{\text{Périmètre du disque équivalent}} \leq ?$$

non : 

Effectivement, je peux avoir une très grande longueur pour une très petite surface : vous prenez un rectangle, une ellipse, vous l'allongez beaucoup … bien, mais vous l'avez allongé, vous avez en quelque sorte changé de coordonnées. Supposez que vous vous permettiez de redresser :

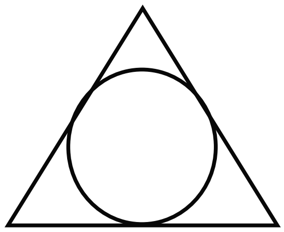


Redresser, ça veut dire : je prends mon convexe, je mets dedans cette fameuse ellipse d'aire maximum (l'ellipse de John-Loewner), et cette ellipse, je décide que c'est un cercle, dans de bonnes coordonnées : je redresse ainsi mon convexe C avec des changements, des étirements et j'en fait un convexe redressé $\tilde{C}$ (en regardant “de biais” mon convexe C et son ellipse, je peux voir l'ellipse comme un cercle et je vois ainsi $\tilde{C}$).

Est-ce que, *après redressement*, le rapport périmètre / périmètre du disque de même aire (troisième degré de méchanceté du convexe C), va être borné ?

$$\boxed{\frac{\text{Périmètre de } \tilde{C}}{\text{Périmètre du disque de même aire que } \tilde{C}} \leq ?}$$

La réponse est oui ! C'est un résultat de 1990 de K. Ball : ce rapport est borné et il est maximum pour le triangle ($\tilde{C}$ est alors un triangle équilatéral).

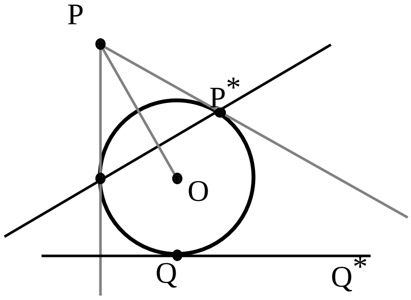


☞ Encore une fois, le triangle est le pire des convexes en produisant un rapport maximum (quel est ce rapport ?).

Quatrième critère : le produit aréolaire

Je vais vous parler de dualité (ou, ici, polarité), quelque chose dont les mathématiciens raffolent. Le principe consiste à réunir dans une même catégorie deux types d'objets avec une correspondance qui permet de passer d'un type d'objet à l'autre, qui permet aussi de traduire autrement des propriétés qui nous intéressent et qui, si on l'applique deux fois, permet de revenir à l'objet de départ. Ce qu'on cherche, c'est à un convexe associer un autre convexe qui aura des rapports avec le premier.

Fixons un cercle du plan, de rayon 1 dont le centre O sert d'origine. A chaque point P associons la droite, qu'on obtient (si le point est à l'extérieur) en menant les tangentes et en joignant les points de contact :

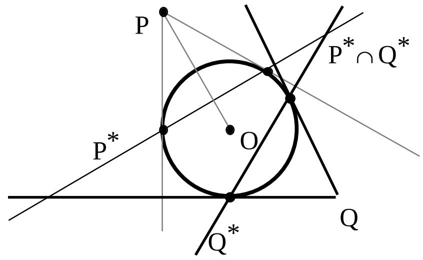


Cette correspondance, appelée polarité (la droite associée à P, notée P*, est appelée la polaire de P) se généralise à tout point, même intérieur : $M \in P^* \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{OP} \leq 1$

Le produit scalaire permet de passer très simplement d'un point P quelconque à sa polaire P* et inversement d'une droite D à l'unique point qui admet D comme polaire. C'est cette dualité, cette double correspondance :

$$\text{point} \rightarrow \text{droite} \rightarrow \text{point}$$

qui est appelée polarité (par rapport au cercle de référence). On observera une certaine parenté avec l'inversion (voir l'article de C. Payan, page 161) : le pied de la perpendiculaire à P* issue de P est précisément l'inverse de P dans l'inversion de centre O et de rapport 1.

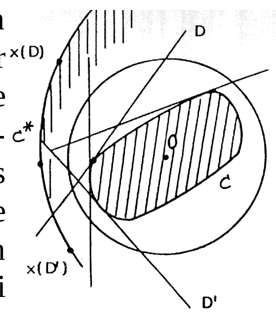


Quand on prend deux points P et Q, et les droites polaires P* et Q*, le point P*∩Q* où elles se coupent a pour polaire la droite (PQ). Plus généralement, tout point de la droite (PQ) a pour polaire une droite qui passe par P*∩Q* : on a remplacé “se couper” par “joindre”, “être sur” (une droite) par “passer par” : tout marche bien et on attend de ça plein de théorèmes myrifiques.

Le produit scalaire nous permet aussi d'étendre notre polarité aux convexes contenant l'origine O (nous considérerons des convexes symétriques par rapport à O ; ce n'est pas absolument nécessaire, mais …). Le polaire C* du convexe C sera défini par :

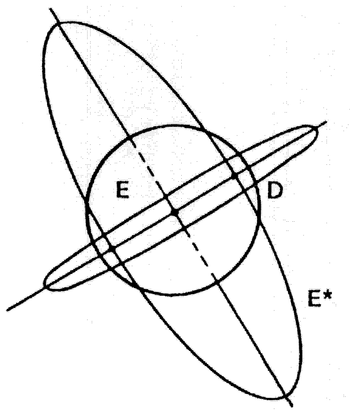
$$M \in C^* \Leftrightarrow \forall\, P \in C,\ \overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{OP} \leq 1$$

Géométriquement, si on applique la polarité (par rapport au cercle de rayon 1 centré sur l'origine O) à tous les points intérieurs à un convexe C (qui contient O) on obtient des droites qui enveloppent un autre convexe qui n'est autre que C*. Le polaire C* peut aussi être vu comme l'ensemble des points dont les droites polaires sont extérieures à C. On a :



(C*)* = C

Si le convexe de départ est à peu près rond, est-ce que son polaire, son dual, va être lui aussi à peu près rond ? La première remarque, qui est évidente, c'est que si je prend pour C le disque unité lui-même, la polaire d'un point sur le bord, c'est la tangente. Donc C* = C.
C'est facile de voir que la figure polaire

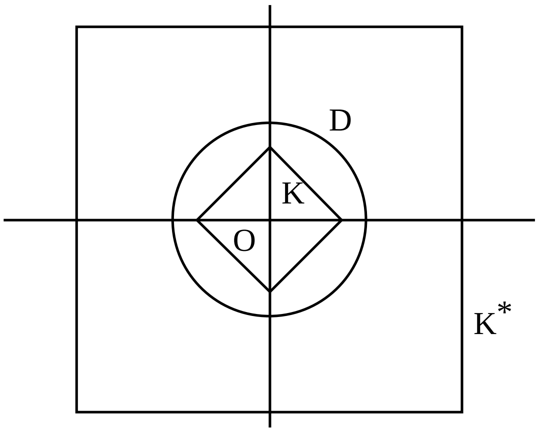


d'une ellipse E (centrée en O) est une autre ellipse E* : les longueurs des axes de E* sont les inverses des longueurs des axes de E.

Du coup, quand je calcule les surfaces :

$$\text{aire (E).aire (E*)} = (\text{aire dique})^2 = \pi^2$$

Que se passe t-il pour d'autre convexes ?



Le dual du carré extérieur, c'est le carré intérieur : il a tourné. Quand vous faites le produit des surfaces, vous trouvez 8. Il est raisonnable (l'inverse d'un point très loin étant très près …) de penser que le *produit aréolaire* **aire (C).aire (C*)** qui est, en fait, indépendant de la structure euclidienne (!) n'est jamais très grand ni très petit.

$$\mathbf{8 \le aire(C).aire(C^*) \le \pi^2}$$

De fait, comme l'a prouvé Blaschke vers 1930, le produit aréolaire est maximum pour les ellipses et minimum pour les carrés (parallélogrammes). Comme pour l'inégalité isopérimétrique, les cas d'égalité sont chers : il est difficile de montrer que les ronds et les carrés sont les seuls cas extrêmes (Santalo 1947, Saint-Raymond 1981).

Le produit aréolaire fourni ainsi un quatrième critère pour mesurer la "méchanceté" d'un convexe symétrique, le carré étant dans ce cas le pire des convexes symétriques.

On généralise sans difficulté la polarité à l'espace, à 3 dimensions ou plus (disque → boule, aire → volume, etc …). Le polaire d'un cube est alors un octaèdre, le polaire d'un dodécaèdre est un icosaèdre … Les ellipsoïdes (boules applaties ou étirées …) remplacent les ellipses.
Alors maintenant il y a une question qui se pose, c'est de savoir quand on prend un convexe et son dual, quand on fait le produit des volumes est-ce que c'est ni trop petit ni trop grand ? Pour la dimension 3, on a encore

$$\mathbf{volume (C).volume (C^*) \le (volume\ boule)^2}$$

avec égalité pour les ellipsoïdes et on sait qu'il y a toujours une borne supérieure en dimension quelconque.

Par contre la question de la borne inférieure est un problème ouvert, même en dimension 3. On sait seulement que ce n'est pas 0. Alors, pour ce quatrième critère de méchanceté,

Le cube est-il le pire des convexes symétriques ?

certains le pensent …