# atelier "MATh.en.JEANS"

dimanche 12 avril 1992 de 10h à 18h30
avec
12 élèves volontaires, dont 3 Danois,

enseignants : MM. Jean-Claude Oriol, Gert Schomacker, René Veillet.

chercheurs : MM. Gérard Duchamp et Pierre Duchet.

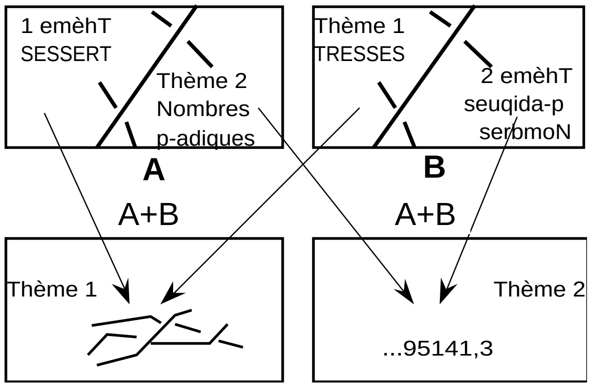
**ATELIER "MATh.en.JEANS"**

**en direct avec le public**

**Simulation d'un vrai jumelage, en temps acceleré**

Principe général :

Cadre localisé
(groupe, Equipe)




Cadre commun
(Séminaire, communications)

Prévisions :

12 élèves volontaires
2 chercheurs
4 professeurs

Têtes, papier, crayons, documentation, ordinateurs, calculettes, retro-projecteurs

2 situations de recherches initialisées par 2 questions sources

1 raton-laveur

Recherche en groupe

Mini Séminaire

Recherche en groupe

Preuves, Communication

validation

Déroulement :

| | |
|---|---|
| 10h00-10h15 | Présentation des sujets par les chercheurs (en parallèle) |
| 10h15-10h30 | Recherche par groupe, suivie par les enseignants |
| 10h30-10h45 | Discussions élèves-chercheurs |
| 10h45-11h15 | Recherche par groupe suivie par les enseignants 2ème phase |
| 11h15-11h35 | Pause |
| 11h35-11h55 | Mise en commun, suivie de loin par enseignant et chercheur |
| 12h00-12h20 | Thème 1 Exposé court et discussion sur les premières approches |
| 12h20-12h40 | Thème 2 Exposé court et discussion sur les premières approches |
| 12h40-12h55 | Travail thématique: division du travail et directions de recherches. |

13h00-14h30 Repas

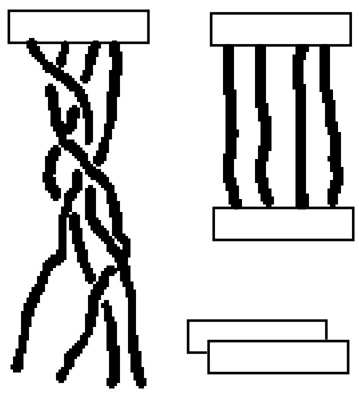
14h30-15h35 Recherche active (nouveaux axes)
15h35-15h50 Synthèse interneavecles enseignants
15h50-16h15 Pause, discussion avec le public
16h15-16h 45 Mise en commun thématique
16h45-17h15 Outils démonsratifs et langagiers
Validation et statut des résultats
17h15-17h45 préparation des communications
17h50-18h00 Temps-mort
18h00 Bilan de l'Atelier, par les enseignants, les chercheurs et les élèves

***Atelier "Math en Jeans"***
***Palais de la découverte,***
***12 Avril 1992.***

12 élèves participent,
dont un groupe de 3 Danois.

***Introduction des sujets***
(commune à tous les groupes)

◊1 (durée : environ 15 mn, avec rétroprojecteur et transparents)
Définition d'une tresse et présentation du matériel de manipulation



exemple de permutations de contenu par successions de transpositions du type (i, j) et par usage d'une case vide (transpositions de types (1, k)). Exposé des 3 questions.

◊2 (environ 4 mn)
Présentation des "nombres à l'envers" appelés 10-adiques, définis comme succession illimitée de chiffres, écrits de droite à gauche.
Gestuel de droite à gauche pour l'écriture et pour la présentation de l'addition et de la multiplication ordinaires, généralisées. Exemple de la suite à virgule… 95141,3.

◊2 Exemples

| | |
|---|---|
| | … 562951413 |
| … 987654321 | X 19 |
| + … 562951413 | … 066562717 |
| | … 62951413 . |
| … 550605734 | … 96076847 |

Choix collectif de l'appellation "brenom".

***Documents fournis***

◊1

- Matériel de manipulation (tresses pures à 4 brins) : 2 sets de 4 brins par groupe, dont un de longueur double et non clos.

- Après 15 minutes de réflexion, les photocopies des transparents pour ◊1.

◊2

- Au cours de l'après midi, la structure d'anneau commutatif est donnée par le chercheur au groupe B2, en réponse à une situation où l'associativité était requise par des élèves.

***Problèmes-sources***

◊1

Q1 Comment ranger une liste dérangée ?
- en utilisant une case mémoire libre ?
- en utilisant des substitutions ?
- Peut-on faire avec moins de "générateurs" (= permutations données à l'avance qui permettent de réordonner) ?
- Combien méchante est une liste dérangée?

Q2 Comment dénouer une tresse par branchement (= mise bout à bout) avec d'autres tresses, les plus élémentaires possibles ?

Q3 Plusieurs solutions sont-elles possibles ? Comment passer de l'une à l'autre ?
Combien méchante est une tresse nouée ?

◊2

Une suite de chiffres illimitée à gauche est un brenom. Addition et multiplication sont donc faciles à faire avec des brenoms. $\sqrt{2}$ existe-t-il chez les brenoms ?

***Déroulement***

◊1

Très vite, dans le groupe A1, une tresse inverse est trouvée : on symétrise (en pratique : de croisement en croisement pas à pas). Le groupe A2 trouve également cette solution "miroir".

Dans le groupe A1, on modélise par des couples de position de brins, que l'on compose : on arrive à la relation "de Chasles" :

$$(i, j)\ (j, k) = (i, k)$$

où (i, j) désigne l'opération qui fait croiser le brin qui est, au niveau où on désire opérer, en i-ème position avec celui qui est en j-ème position (en passant au dessus des brins intermédiaires).

Les jeunes sont tout surpris de faire des maths avec des tresses !

Un problème nouveau posé au groupe B1 par le chercheur 2 (comment démêler les fils embrouillés d'une marionnette) conduit finalement à la même activité de modélisation de tresses que dans l'autre groupe, encouragée fortement par l'enseignant. Affirmation selon laquelle la tresse

$$(1, 2)\ (3, 4)$$

n'est pas la tresse d'une marionnette.

Avec la mise en commun avec l'autre groupe, ils ont découvert la dualité des codes possibles : par position ou par brin. Ils choisissent le codage brin, qu'ils finirons par rejeter plus tard comme malcommode pour coder leur solution miroir.

L'importance de l'ordre des croisements ne leur échappe pas, mais aucune propriété concernant cet ordre n'est envisagée. Le concept même d'ordre partiel n'est pas apparu. La représentation implicite de ces croisements est restée géométrique.

Simulation d'un vrai jumelage, en temps acceleré

◊2

Grande discussion sur l'emploi ou non de la virgule … Les Danois (groupe A2) traitent avec, en analysant comment se décale la virgule en multipliant par des puissances de dix. Dans les deux groupes il y a confusion entre la partie décimale d'un nombre à virgule et la partie "avant la virgule" (= à droite de la virgule) d'un brenom. Cette confusion provient de l'idée implicite que $\sqrt{2}$ doit ressembler à 1,414…

Le chercheur interdit l'usage de la virgule au groupe B2, ce qui ajoute à leur perplexité. Les élèves de ce groupe font appel à une mathématicienne spécialiste des nombres p-adiques, sujet que l'un des élèves a déjà travaillé, pour questionner sur les rapports entre les sujets ; la réponse, un brenom vu comme limite "adique" (i.e. avec une distance p-adique) de nombres ne fait que prolonger leur confusion.

Peu après les élèves développent l'idée qui va les conduire à l'émerveillement : trouver b tel que b x b = 1 + 1 sera possible si on dispose d'une fonction log dans les brenoms ! Ils acceptent alors le conseil du chercheur de travailler sur la définition de 1.

Mobilisation, exceptionnelle en qualité, des acquis sur la multiplication et l'addition ; découverte de $-1 = \underline{9}$ . A propos de l'unité, des insuffisances en logique et dans la compréhension du caractère algorithmique des opérations apparaissent. Confusion entre l'unicité d'une unité dans l'anneau des brenoms et l'unicité d'une solution de l'équation $a\ x = a$, pour a quelconque.

***Exposé final***

◊1

Les codages des tresses par composition de croisements élémentaires (i, j) des positions des brins est maîtrisé ; la relation de Chasles est mise en évidence.

Le codage "dual" (par brins) est indiqué ; une tresse quelconque est dénouée par branchement de la tresse miroir : gestuel de symétrisation à plusieurs mains.

◊2

2 exposés sans virgules !

♦ $b^2 = 2$ ➜ b x b = 1 + 1 ; Fonction Log ?

♦ Il y a une seule unité : $\underline{0}1$ = ...0001, car c'est le seul brenom qui, multiplié par $\underline{0987654321}$ donne $\underline{0987654321}$.

Démonstration, remarquablement claire et précise, de l'unicité d'une solution de ax = a, et existence (la définition par récurrence d'une somme infinie de brenoms à écritures décalées d'une manière triangulaire reste implicite, justifiée mentalement par l'analogie avec la définition de la multiplication des brenoms).

Etude de l'équation ax = 1 : 1/2 n'existe pas, ni 1/5. Mais 1/3 = $\underline{6}7$ existe, et est unique ! idem pour 1/7.

Les deux groupes trouveront d'autres résultats dès le lendemain de l'atelier : non existence de $\sqrt{2}$ , entre autres.

*rapporteur : Pierre Duchet*

P.S. Suite à cet atelier, le LSD2 a résolu le problème des marionnettes par un algorithme qu'à notre connaissance, les spécialistes ignoraient.