les ombres

par … élèves de 2de, 1ère et Tle (jumelage entre le lycée Pablo Neruda de St Martin d'Hères et le lycée Emmanuel Mounier de Grenoble)

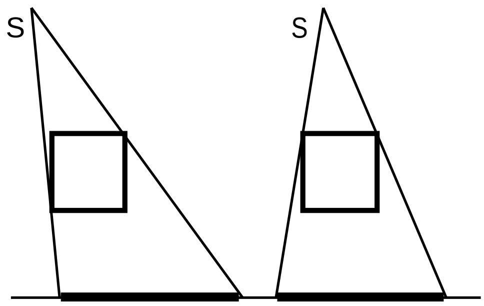
enseignants : Pierre Boulier, André Laur, Jean-Claude Oriol

chercheur : Charles Payan, LSD2-IMAG

Commentaires de la rédaction :

Des objets différents peuvent avoir la même ombre. Comment construire par exemple un objet qui, du point de vue de ses ombres se comporte exactement comme un cube ? Ainsi était formulé le sujet de recherche initial. Ce type de problématique est apparu comme important dès la fin du XIXème siècle en géométrie des corps convexes et intervient dans de nombreux domaines tant mathématiques (théorie du potentiel, surfaces minimales) qu'appliqués (physique des bulles de savons, de la chaleur, … ; architecture ; médecine). Après réflexion, il a paru plus simple aux jeunes de se limiter à une version bidimensionnelle plane du problème et il leur est apparu une liaison inattendue avec un autre problème fameux (et non résolu), connu sous le nom de "problème des arbres de Steiner" : comment relier un ensemble donné de points du plan par un réseau de lignes de longeur minimum. Le traitement du problème dans le cas de 3 points est un des "classiques" de la géométrie du triangle, étudié notamment par Toricelli et par Fermat, avec des motivations d'applications en physique. Les jeunes ont utilisé ce qu'ils avaient trouvé dans le cas du plan pour apporter une réponse au cas du cube 3-dimensionnel ; ainsi a-t-on vu apparaître au moment du congrès une maquette d'une surface qui projettait dans n'importe quelle direction la même ombre qu'un cube (réponse non définitive au problème initial, mais déjà très économique du point de vue de la quantité de matière utilisée et ayant des qualités esthétiques) … Hélas, cette maquette fut égarée et ne peut être présentée ici.

Les travaux que nous avons entrepris concernent la recherche d'objets ayant même ombre qu'un cube (par exemple) mais dont l'élaboration nécessiterait moins de matière. Nos recherches ont essentiellement porté sur les ombres (linéaires) des figures planes. En choisissant par exemple un carré :

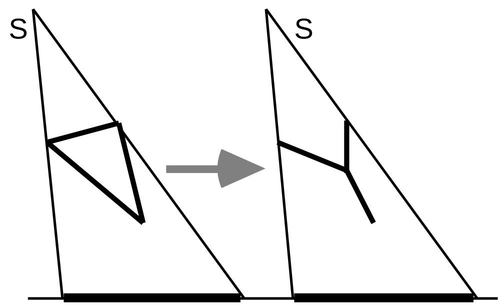


On a remarqué que l'ombre créée par le carré sur une droite par rapport à une source lumineuse S varie suivant la position de cette source (ou l'orientation du carré). Donc pour construire un objet ayant même ombre que le carré, il apparaît nécessaire de conserver les 4 sommets. Plus généralement, il apparaît nécessaire de conserver tous les sommets [NDLR : les points saillants] d'un objet lorsqu'on veut un objet ayant même ombre. [NDLR : grâce à cette remarque, qui en toute rigueur n'est valable que pour les polyèdres convexes, le problème acquiert ici sa formulation plus précise : les sommets du corps C considéré déterminent sa position. Ce que l'on cherche est un corps C' ayant les mêmes sommets que C et tel que, quelle que soit la position de la source de lumière S et quel que soit l'écran sur lequel on projette (on choisira S hors de C et on prendra pour écran un plan qui ne rencontre pas C), l'ombre de C' sur l'écran coïncide avec celle de C.]

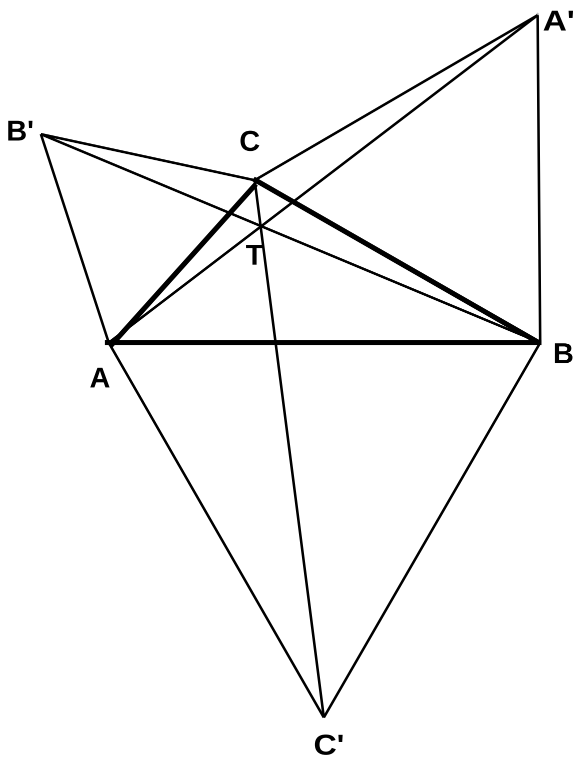
le triangle

Le but étant de trouver une figure ayant la même ombre qu'un triangle, mais qui nécessite le moins de matière possible, les conditions sont [NDLR : il s'agit en fait d'hypothèses de travail.] :
— les 3 sommets doivent être reliés,
— l'ensemble doit être fait en un seul morceau.

On a cherché des formes simples formées de 3 segments :



Pour mesurer la quantité de matière utilisée, on choisit la longueur totale des segments utilisés. Après plusieurs essais ces recherches ont abouti à la découverte du point de Toricelli d'un triangle, point qui est ontenu par la construction suivante :



On construit trois triangles équilatéraux, un sur chaque côté du triangle ABC d'origine ; on relie les nouveaux sommets A', B', C' des triangles équilatéraux respectivement aux sommets du triangle ABC qui leur sont opposés. Les trois droites ainsi construites concourent en un point T, qui est le point de Toricelli.

En fait on a aussi les propriété suivantes :

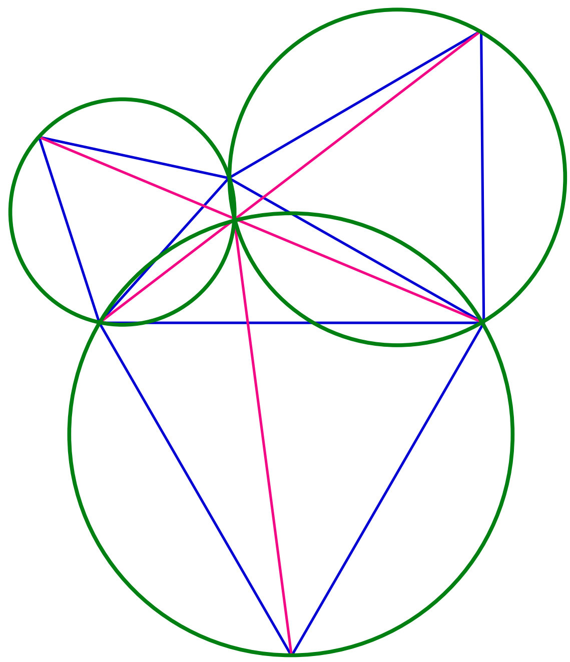
(1) T est le point commun des trois cercles circonscrits aux triangles équilatéraux.

(2) Les trois segments [AA'], [BB'] et [CC'] ont mêmes longueurs.

(3) Les droites (AA'), (BB') et (CC') font entre elles des angles égaux à $2\pi/3$ (radians, soit 120 degrés).

(4) Si les angles du triangle ABC sont inférieurs à 120°, le point T est intérieur au triangle ABC et à chacun des segments [AA'] [BB'] et [CC']. On a alors :

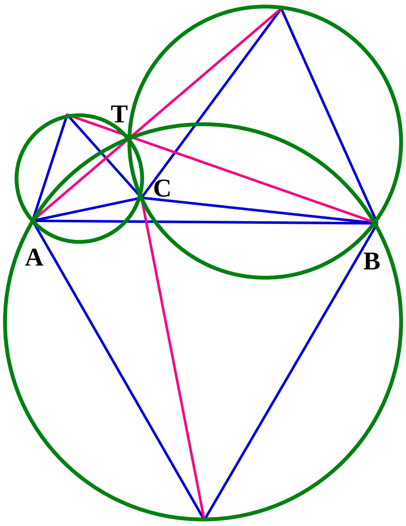
$$s = TA + TB + TC$$



[NDLR : l'existence du point de Toricelli fut signalée aux élèves par l'un des enseignants. L'équipe a alors consacré l'essentiel de son activité à démontrer les propriétés énoncées ci-dessus et le théorème suivant, qui fournit la solution du problème cherché (sous les hypothèses de travail faites au début). Le lecteur intéressé pourra trouver l'essentiel des démonstrations dans les livres classiques sur la géométrie du triangle, notamment celui d'Yvonne et René Sortais, *La Géométrie du Triangle*, Hermann, Paris, 1987.

Théorème. Lorsque les angles du triangle ABC sont inférieurs ou égaux à 120°, le point de Toricelli T est l'unique point du plan qui minimise la quantité *s* = TA + TB + TC.]

Ce qui précède ne s'applique pas à un triangle ayant un angle supérieur à 120°, le point de Toricelli étant alors à l'extérieur du triangle.

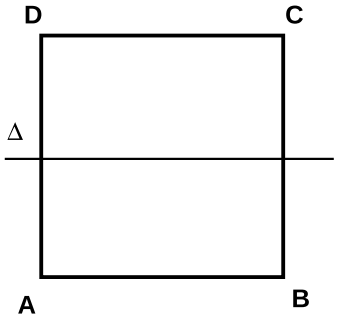


Quel est donc la solution de longueur minimale pour relier les 3 sommets d'un tel triangle ? Nous pensons que la somme des distances d'un point M du plan aux 3 sommets, *s* = MA + MB + MC est minimum lorsque M est confondu avec le sommet du triangle où l'angle est supérieur à 120°, soit sur la figure, lorsque M = C. La somme *s* est égale à la somme des deux plus petits côtés du triangle. [Il resterait à démontrer cette conjecture].

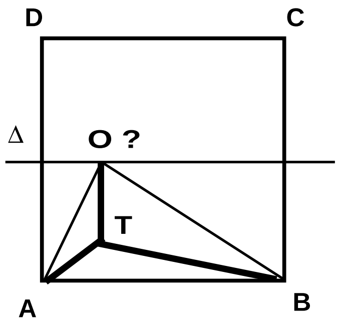
le carré

Le but est de trouver une figure ayant la même ombre qu'un carré, mais qui nécessite le moins de matière possible. La figure cherchée répondra aux conditions suivantes [NDLR : il s'agit des hypothèses de travail, qui précisent le type de solution cherchée] :
— les 4 sommets doivent être reliés par un ensemble de segments,
— la somme des longueurs des segments utilisés doit être minimum,
— l'ensemble doit être fait en un seul morceau.

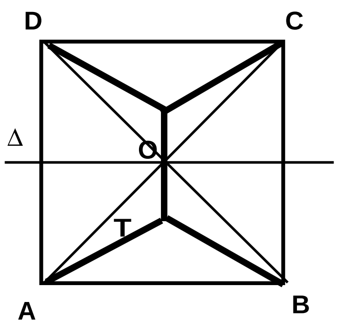
Notre méthode de recherche consiste à séparer notre carré en deux parties égales par un droite Δ, axe de symétrie de notre carré :



Pour chaque partie, le problème devient donc : comment relier par un réseau de chemins le plus court possible les points A et B à la droite Δ ?



On construit un triangle à partir d'un point de Δ que l'on nomme O, et l'on construit alors le triangle AOB. En appelant T le point de Toricelli du triangle AOB, la longueur minimale cherchée sera OT + AT + BT. On réalise ensuite la réflexion d'axe Δ pour opérer la même construction sur l'autre partie. On obtient ainsi une liaison des 4 points A, B, C, D de longueur 2 (OT + AT + BT). On s'aperçoit que l'on a intérêt à choisir O au centre du carré :

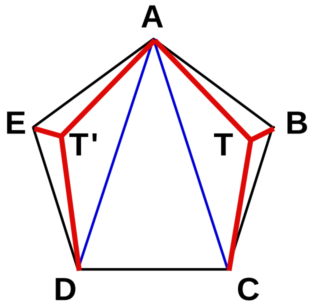


Nous pensons que la solution obtenue de cette manière est la meilleure possible.

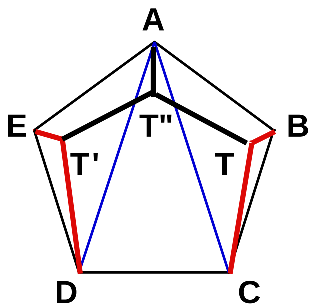
les autres polygones

conjecture : nous pensons qu'une solution [optimale] est une figure composée de segments où chaque nouveau sommet est commun à trois segments qui font des angles de 120°.

le pentagone régulier



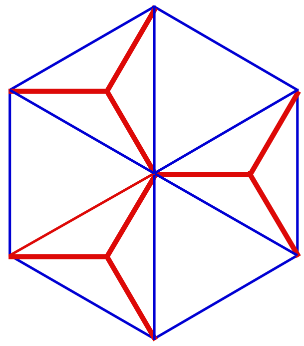
Notre méthode comprend deux étapes :
— la première consiste à diviser le pentagone en 2 triangles par exemple AED et ABC, auxquels on applique la méthode du point de Toricelli.
— la seconde consiste à remarquer qu'avec les points A, T et T', on obtient un nouveau triangle, pour lequel on prend à nouveau le point de Toricelli, T".



On peut réitérer le procédé, avec les nouveaux triangles ainsi formés (c'est-à-dire EDT" et BCT"), etc. Mais les angles des figures obtenues ne sont pas tous égaux à 120°. Le problème reste donc ouvert. [NDLR : Les élèves parlent ici de "contre-conjecture" pour signifier que la figure qu'ils obtiennent n'est sans doute pas optimale.]

hexagone et heptagone réguliers

Avec la méthode précédente de découpage en triangles, nous rencontrons pour l'heptagone les mêmes problèmes qu'avec le pentagone. Pour l'hexagone régulier, nous obtenons une figure dont tous les angles font 120° et nous conjecturons que c'est la solution de longueur minimum :



[NDLR : Il est intéressant de constater que même lorsqu'une solution semble *clairement* la meilleure, il n'est pas évident de le démontrer. Par exemple, comment éviter de faire la preuve du théorème général énoncé plus haut, et démontrer que pour le triangle équilatéral, la meilleure solution utilise son centre ? Est-il vrai que la manière — de longueur totale la plus courte — de relier ensemble les sommets d'un tétraèdre régulier soit de joindre son centre à chacun des sommets ?]